Aix. Marseille

N° D'ORDRE C.N.R.S. : A.O. 9056

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE PROVENCE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Christian ARCHAMBAULT

MESURE DES NOYAUX NON LINEAIRES D'UN REACTEUR A BASSE PUISSANCE

Soutenue le 29 septembre 1973 devant la Commission d'Examen

JURY

M. M. CADILHAC — Président

MM. J. HENNEQUIN, J.P. MILLOT, J. BAILLY — Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545827_0016

Nº D'ORDRE C.N.R.S. : A.O. 9056

THESE

présentée

A L'UNIVERSITE DE PROVENCE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR-INGENIEUR

par

Christian ARCHAMBAULT

MESURE DES NOYAUX NON LINEAIRES D'UN REACTEUR A BASSE PUISSANCE

Soutenue le 29 septembre 1973 devant la Commission d'Examen

JURY

M. M. CADILHAC — Président

MM. J. HENNEQUIN, J.P. MILLOT, J. BAILLY — Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE PROVENCE

U.E.R. Scientifiques

Président : F. BOREL

Secrétaire général : C. MOYNAULT

PROFESSEURS

MM.	J. VALENSI	Mécanique expérimentale des fluides
	P. ROUARD	Physique générale
	P. DESNUELLE	Chimie biologique
	M. MERIGOUX	Physique industrielle
	C. FEHRENBACH	Astronomie
	A. FAVRE	Mécanique de l'atmosphère et météorologie
	A. GUILLEMONAT	Chimie industrielle
	G. CARPENI	Chimie
	Y. DOUCET	Physique
	JM. SOURIAU	Méthodes mathématiques de la physique
	J. METZGER	Chimie
	L. FOURES	Mathématiques
	D. MALE	Physique
	G. BODIOU	Mathématiques appliquées
	M. NAUDET	Chimie des corps gras
	P. BOUSQUET	Physique
	P. PESTEIL	Physique
	P. CASAL	Mécanique rationnelle et appliquée
	G. GOUVERNET	Géologie appliquée
	A. VISCONTI	Physique théorique
	A. BLANCHARD	Mathématiques générales
	M. DUSSARDIER	Physiologie animale
	P. QUEZEL	Botanique
	A. JULG	Chimie théorique
	S. TAXY (Mme)	Géologie historique
	F. TESSIER	Géologie générale
	ML. FURNESTIN (Mme)	Biologie animale
	M. BERTRAND	Chimie
	J. TROMPETTE	Physique
	M. LAFFITTE	Chimie
	R. FRAISSE	Mathématiques
	C. BLANCHARD (Mme)	Mathématiques
	R. NEGRE	Biologie végétale
	R. COULON	Physique

MM.	R. KERN	Minéralogie
	L. SIDERIADES	Physique
	JM.SURZUR	Chimie organique
	H. CHANTREL	Physique de l'espace
	J. SOUGY	Géologie
	J. HERVE	Electronique
	H. BODOT	Chimie
	J. CHOUTEAU	Physiologie animale
	R. PHILIP	Physique
	L. CAPELLA	Minéralogie
	P. BILLARD	Mathématiques
	M. BONNEAU	Mathématiques
	JC.TRAYNARD	Chimie industrielle
	C. CLARION (Mlle)	Mécanique des fluides
	A. PONS	Botanique
	A. GIRARDIE	Zoologie
	J. MANDELBROJT	Physique
	M. BIZOUARD	Physique
	JP.DAVID	Physique
	JC.MAIRE	Chimie
	M. SIMON	Physiologie animale
	G. MARCHIS-MOUREN	Chimie biologique
	R. PETIT	Physique
	M. HUGON	Psycho-physiologie

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	R. AMAR	Zoologie
	L. DEVEZE	Biologie marine
	F. BOREL	Techniques mathématiques de la physique
	R. CHANDEBOIS (Mlle)	Biologie animale
	H. GUENOCHE	Mathématiques appliquées
	J. HENNEQUIN	Electronique
	S. GUEIRARD (Mlle)	Pétrographie
	C. FEUGEAS	Chimie
	J. CABANE	Chimie
	G. RASIGNI	Physique
	S. COMBET	Chimie
	R. GARRON	Physique expérimentale
	M. CADILHAC	Physique
	B. WAEGELL	Chimie
	F. HALBWACHS	Physique
	M. PICHENOT (Mlle)	Biologie végétale
	M. GILLET	Physique
	L. SARDA	Biochimie
	C. ROMAN	Physiologie animale
	A. GILLET	Mathématiques
	S. MARTINUZZI	Physique

MAITRES DE CONFERENCES

MM.	H. PATIN	Chimie
	J. CRESP	Biologie animale
	M. BENARROCHE	Physique
	H. TACHOIRE	Chimie
	E. VINCENT	Chimie
	L. VICENTE	Biologie animale
	J. MANUCEAU	Mathématiques
	R. GUERMEUR	Physique
	M. DELAAGE	Biochimie
	F. CATZIGRAS (Mlle)	Géologie
	M. SIRUGUE (Mme)	Physique
	H. MERDY	Physique
	L. PUJOL	Chimie
	A. LAVAGNE	Biologie végétale
	J. GIUDICELLI	Biologie animale
	M. FOUGEREAU	Biochimie
	G. NOAT	Physiologie végétale
	R. BOUDET	Mathématiques
	R. STREIFF	Chimie
	JP. BELAICH	Microbiologie
	P. NEVILLE	Biologie végétale
	JP. SOUBLIN	Mathématiques
	S. DELACHE (Mme)	Mathématiques
	A. CASALOT	Chimie
	M. MOULINS	Biologie générale
	J. DETRAZ	Mathématiques
	R. PUJOL	Psycho-physiologie
	B. MARTINET	Mathématiques
	G. FARDOUX	Mathématiques
	D. BENLIAN	Chimie

TABLE DES MATIERES

		Page
INTRODUCTION		1
PREMIERE PARTIE	: PRINCIPE DE LA MESURE DES NOYAUX CARACTERISTIQUES D'UN SYSTEME NON LINEAIRE	4
INTRODUCTION		4
CHAPITRE I	: NOYAUX DE VOLTERRA ET NOYAUX DE WIENER	5
	I.1. Noyaux de Volterra	5
	I.2. Noyaux de Wiener	6
	I.3. Relations entre noyaux de Volterra et noyaux de Wiener	9
CHAPITRE II	: METHODE DE MESURE DES NOYAUX DE WIENER	11
	II.1. Méthode générale de mesure des noyaux de Wiener	11
	II.2. Application à la mesure des noyaux de Wiener d'un système caractérisé par ses noyaux de Volterra	13
CONCLUSION		14
DEUXIEME PARTIE	: PRINCIPE D'UNE METHODE DE MESURE DES NOYAUX CARACTERISTIQUES DE LA RELATION PUISSANCE-REACTIVITE D'UN REACTEUR A BASSE PUISSANCE	16
INTRODUCTION		16
CHAPITRE III	: CALCUL DE LA REPONSE EN PUISSANCE D'UN REACTEUR EN BOUCLE OUVERTE SOUMIS A UN SIGNAL DE REACTIVITE QUELCONQUE	18
	III.1. Solution intégrale des équations de la cinétique	18
	III.2. Calcul des noyaux de Volterra des équations de la cinétique	20
	III.3. Expression du noyau de Volterra du premier ordre	22
CHAPITRE IV	: CALCUL DES NOYAUX DE WIENER DU PREMIER ET SECOND ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE	24
	IV.1. Symétrisation de noyaux de Volterra des équations de la cinétique	24
	IV.2. Calcul du noyau de Wiener du premier ordre des équations de la cinétique	24
	IV.3. Calcul du noyau de Wiener du second ordre des équations de la cinétique	26
	IV.4. Existence des noyaux de Wiener des équations de la cinétique	28
	IV.5. Interprétation physique de l'inexistence des noyaux de Wiener du premier et second ordre des équations de la cinétique	29
CHAPITRE V	: PRINCIPE D'UNE METHODE DE MESURE DES NOYAUX DE VOLTERRA DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE	32
	V.1. Définition du signal de réactivité utilisé	32
	V.2. Calcul de la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre les variations relatives de puissance et le bruit blanc gaussien	34

V.3. Calcul de la fonction d'intercorrélation du second ordre entre les variations relatives de puissance et le bruit blanc gaussien 36

V.4. Généralisation au calcul des fonctions d'intercorrélation d'ordre quelconque entre les variations relatives de puissance et le bruit blanc gaussien 37

CONCLUSION 41

TROISIEME PARTIE : APPLICATION A LA MESURE PHYSIQUE DU NOYAU DE VOLTERRA DU PREMIER ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE 43

INTRODUCTION 43

CHAPITRE VI : RESUME DES TRAVAUX DE R. HOOPER 45

VI.1. Génération des signaux pseudo-aléatoires ternaires 45

VI.2. Fonctions d'autocorrélation des signaux pseudo-aléatoires ternaires 46

VI.3. Utilisation des signaux pseudo-aléatoires ternaires pour la mesure des noyaux du premier et second ordre d'une classe de systèmes non linéaires 48

CHAPITRE VII : MESURE DU NOYAU D'UN SYSTEME LINEAIRE AU MOYEN DE SIGNAUX PSEUDO-ALEATOIRES TERNAIRES 51

VII.1. Expression de la fonction d'intercorrélation du premier ordre d'un système linéaire excité par un signal quelconque 51

VII.2. Calcul de la fonction d'intercorrélation du premier ordre d'un système linéaire excité par un signal pseudo-aléatoire ternaire 52

CHAPITRE VIII: EXPERIENCES REALISEES SUR LE REACTEUR CABRI 56

VIII.1. But des expériences 56

VIII.2. Dispositif expérimental 57

VIII.3. Description des processus expérimentaux 58

VIII.4. Résultats 60

CHAPITRE IX : INTERPRETATION NUMERIQUE 62

IX.1. But de l'interprétation numérique 62

IX.2. Principe du programme numérique 62

IX.3. Utilisation du programme numérique 65

IX.4. Résultats 66

RESUME 69

CONCLUSION 73

BIBLIOGRAPHIE 75

LISTE DES ANNEXES 76

LISTE DES FIGURES 125

INTRODUCTION

Dans le travail de thèse de C. COUDERT [8], il a été démontré l'existence d'un comportement périodique de la puissance d'un réacteur expérimental. La méthode employée ne permet pas cependant de calculer le cycle limite. Le but initial de ce travail était de trouver un modèle simplifié des équations de la cinétique avec une contre-réaction en réactivité permettant de calculer ce cycle limite. Une tentative de calcul des noyaux de la théorie de Wiener a montré que, pour le type de non-linéarité affectant ces équations, celle-ci ne s'appliquait pas. Le travail a donc été orienté vers une adaptation de cette théorie aux équations de la cinétique et vers une tentative de vérification expérimentale de cette adaptation.

Pour mieux situer le problème, rappelons que le comportement dynamique d'un réacteur nucléaire subit d'importantes modifications lors d'une montée en puissance. En effet, le transfert de chaleur combustible-réfrigérant est un processus non-linéaire qui dépend de la puissance produite. Comme ce transfert de chaleur s'effectue de façon imparfaite, il contribue à échauffer le combustible et, par suite, à modifier la réactivité. La relation puissance-réactivité dépendant donc d'une façon non-linéaire de la puissance, il s'ensuit que la puissance affecte non linéairement le comportement dynamique du réacteur qui est fondamentalement décrit par les équations de la cinétique.

Pour les réacteurs nucléaires à eau légère du type piscine, différents modèles de fonctionnement peuvent être discernés suivant le niveau de la puissance. A basse puissance, la chaleur produite par la fission est faible et le transfert de chaleur n'influe pas de façon sensible sur la relation puissance-réactivité qui est alors simplement définie par les équations de la cinétique. A moyenne puissance, la chaleur dégagée échauffe notablement le combustible mais n'est pas suffisante pour faire bouillir l'eau au contact des plaques combustibles. Dans ce cas, le comportement du réacteur est décrit par un système d'équations qui comprend les équations de la cinétique et des équations qui caractérisent le transfert de chaleur au moyen de l'hydro - et de la thermodynamique. Enfin, à haute puissance, la chaleur dégagée provoque l'ébullition de l'eau au contact des plaques combustibles de telle sorte que le transfert de chaleur n'est plus défini par le même système d'équations que précédemment.

Le comportement d'un réacteur à eau légère peut donc être décrit par trois modèles correspondant à trois gammes de puissance. Il est à remarquer que ces gammes sont différentes selon que le réacteur fonctionne en convection naturelle ou en convection forcée. Cette description schématique met cependant en évidence l'influence capitale sur ce comportement des modes de transfert de la chaleur entre une plaque chauffante et l'eau. Bien que de nombreuses données soient connues expérimentalement au sujet de ces modes de transfert, la théorie reste impuissante à rendre compte avec exactitude de leurs

effets. D'une part, les équations qui définissent ces transferts sont fort complexes et d'autre part, le couplage de ces équations avec les équations de la cinétique rend très difficile l'interprétation du comportement du réacteur.

C'est pourquoi, une série d'études expérimentales et théoriques a été entreprise sur le réacteur CABRI. En premier lieu, il a été procédé expérimentalement à des excursions ou "bursts" de puissance dont l'interprétation théorique est encore un sujet de recherche [9]. En second lieu, le réacteur a été soumis à différentes expériences dynamiques dont le but était la mesure de la fonction de transfert puissance-réactivité pour différentes valeurs de la puissance. Ces mesures ont permis de mettre en évidence la déformation de la fonction de transfert qui est définie par les équations de la cinétique. Cette déformation, due à l'élévation de la puissance, est notamment caractérisée par l'apparition d'un pic de résonance dont la fréquence dépend de la puissance [8]. Parallèlement à cette étude, l'analyse du bruit naturel de la puissance pour différents niveaux de puissance a permis de détecter des oscillations libres dont la fréquence est liée à celle du pic de résonance et de conclure à l'existence d'un cycle limite. L'existence de ce cycle limite a été théoriquement démontrée au moyen d'un modèle dynamique du réacteur déduit des mesures de la fonction de transfert puissance-réactivité [8].

Bien que cette étude permette de mieux comprendre le comportement dynamique d'un réacteur à eau légère, il n'en reste pas moins que les fonctions de transfert caractérisent le comportement linéaire local d'un système qui est globalement non-linéaire. En effet, pour un système non-linéaire, la fonction de transfert est la transformée de Laplace du noyau linéaire de la relation sortie-entrée considérée. Or ce noyau linéaire ne donne une description précise de cette relation que dans la mesure où les signaux d'entrée ont une amplitude suffisamment faible pour que puissent être linéarisées les équations définissant cette relation. Une meilleure description de la relation sortie-entrée, donc du comportement dynamique du système, suppose que soient connus le noyau linéaire et au moins le premier noyau non-linéaire ou noyau du second ordre. Du fait de l'apport théorique considérable des travaux de Wiener et des applications multiples qui en ont découlées dans le domaine de l'identification des processus non-linéaires, il semblait possible de mesurer le noyau linéaire et le noyau du second ordre caractérisant la relation puissance-réactivité d'un réacteur à eau légère du type piscine afin d'en mieux comprendre le comportement dynamique. Pour mener à bien une telle mesure, il a été envisagé de mettre au point une méthode fondée sur les théories de Wiener et ensuite de vérifier expérimentalement cette méthode au moyen du réacteur expérimental CABRI. Tel a été le but initial de notre travail.

Les difficultés rencontrées au cours de l'étude théorique du problème nous ont contraint à limiter le champ d'application de la mesure aux basses puissances, c'est-à-dire pour des puissances telles que la relation puissance-réactivité du réacteur est correctement définie par les équations de la cinétique. Bien que dans ce cas tous les paramètres soient bien définis et le système d'équations relativement simple, la recherche d'une méthode de mesure a nécessité des calculs ardus et, par ailleurs, l'application expérimentale de cette méthode a rencontré des difficultés telles que, au stade actuel de l'étude, il n'est pas possible d'envisager une exploitation expérimentale.

Cependant, la méthode préconisée est bien fondée théoriquement du fait même que les calculs qui la justifient ne supposent aucune hypothèse simplificatrice. En particulier, ces calculs montrent l'impossibilité d'utiliser dans notre cas la méthode générale de mesure des noyaux de Wiener, méthode qui a été pourtant appliquée à la mesure de fonctions de transfert et justifiée par une linéarisation abusive des équations de la cinétique. Par ailleurs, l'interprétation numérique des expériences effectuées sur le réacteur CABRI a permis de définir une méthode de mesure du temps de vie moyen des neutrons. En effet, le temps de vie moyen des neutrons est le seul paramètre des équations de la cinétique dont la valeur doit être connue pour la mise en oeuvre de la méthode que nous préconisons. En fait, l'application expérimentale de cette méthode dépend surtout des moyens expérimentaux dont on dispose.

Une bonne compréhension du principe de la méthode que nous proposons, suppose la connaissance de certaines notions théoriques. C'est pourquoi, dans la première partie de ce rapport, sont rappelées les définitions des noyaux de Volterra et des noyaux de Wiener, sont établies les relations qui lient ces noyaux, enfin est exposé le principe de la mesure des noyaux de Wiener au moyen d'une méthode statistique utilisant les bruits blancs gaussiens. Dans la deuxième partie, il est montré l'impossibilité d'appliquer cette méthode au cas particulier des équations de la cinétique; cependant, une interprétation physique permet de déduire une méthode qui est dérivée de la méthode précédente et qui rend possible la mesure des noyaux de Volterra caractéristiques de la relation puissance-réactivité définie par les équations de la cinétique. La troisième partie rend compte de l'application de cette méthode à la mesure physique du noyau linéaire du réacteur CABRI effectuée à l'aide des signaux pseudo-aléatoires ternaires mis au point par R. HOOPER; malgré les résultats peu convaincants de ces expériences, l'exploitation d'un programme numérique permet d'une part de justifier en partie ces résultats, et d'autre part de définir une méthode itérative qui aboutit à la mesure du temps de vie moyen des neutrons.

PREMIERE PARTIE

PRINCIPES DE LA MESURE DES NOYAUX CARACTERISTIQUES D'UN SYSTEME NON-LINEAIRE

INTRODUCTION

La théorie exposée dans cette première partie est applicable aux systèmes non-linéaires dont les relations sorties-entrées sont exprimées par des équations intégro-différentielles. Pour de tels systèmes, l'excitation d'une entrée par un signal quelconque engendre à chaque sortie un signal développable en une série de fonctionnelles, qui dépendent du signal d'entrée et de fonctions caractéristiques de la relation sortie-entrée considérée. On appelle noyaux ces fonctions caractéristiques.

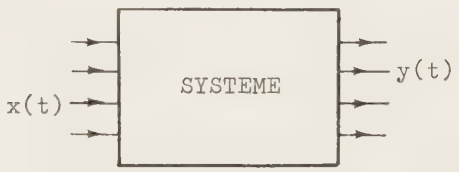
Dans le chapitre premier, nous rappelons les résultats des travaux de Volterra et Wiener sur ces développements en série de fonctionnelles. En effet, Volterra a montré que la sortie de ces systèmes était toujours développable en une série de fonctionnelles homogènes par rapport au signal d'entrée. Chaque fonctionnelle de Volterra est une intégrale multidimensionnelle de convolution d'un noyau avec le signal d'entrée [1]. Par ailleurs, Wiener a imaginé un développement en une série de fonctionnelles non homogènes par rapport au signal d'entrée. Chaque fonctionnelle de Wiener est une somme d'intégrales multidimensionnelles de convolution qui dépendent d'un même noyau et du signal d'entrée. Ces fonctionnelles présentent la propriété d'être orthogonales entre elles quand le signal d'entrée est un bruit blanc gaussien [2]. Un système peut donc être caractérisé par ses noyaux de Volterra aussi bien que par ses noyaux de Wiener. C'est pourquoi nous avons dégagé les relations qui lient noyaux de Wiener et noyaux de Volterra.

Au chapitre second, nous exposons la théorie de la mesure des noyaux de Wiener. En effet, Wiener avait conclu que la propriété d'orthogonalité de ses fonctionnelles offrait la possibilité théorique d'identifier séparément les noyaux d'un système non-linéaire [3]. Cependant, l'application pratique de cette conclusion est due aux travaux de LEE et SCHETZEN. Ceux-ci ont montré que la mesure individuelle des noyaux de la relation sortie-entrée d'un système à identifier se ramenait à la mesure des fonctions d'intercorrélation sortie-entrée de ce système lorsque son entrée est excitée par un bruit blanc gaussien [4]. Après avoir exposé la théorie de cette méthode, nous l'appliquons à la mesure des noyaux de Wiener d'un système caractérisé par ses noyaux de Volterra.

CHAPITRE I : NOYAUX DE VOLTERRA ET NOYAUX DE WIENER

I.1. - NOYAUX DE VOLTERRA

On considère un système non-linéaire dont une entrée est excitée par un signal x(t) quelconque, et on s'intéresse au signal y(t) engendré par cette excitation à l'une des sorties du système.



Lorsque les équations qui régissent le système sont connues, il est possible d'exprimer y(t) en fonction de x(t) au moyen d'un développement de Volterra :

$$[I.1.1] \qquad y(t) = h_o + \sum_{n=1}^{\infty} V_n\,[h_n, x(t)]$$

La constante h_o caractérise l'état initial de la sortie avant l'application du signal x(t) et les fonctionnelles V_n sont des intégrales de convolution multidimensionnelles qui dépendent d'une fonction caractéristique h_n ou noyau d'ordre n, et sont homogènes par rapport à x(t) :

$$[I.1.2] \qquad \begin{cases} V_n[h_n,x(t)] = \int_o^{\infty} \cdots \int_o^{\infty} h_n(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)\ldots x(t-\tau_n)d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_n \\ \tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n \leqslant t \end{cases}$$

La connaissance de l'ensemble complet des noyaux du système suffit pour l'identifier et permet le calcul de sa réponse à n'importe quel signal. D'autre part, la forme des fonctionnelles V_n permet de considérer des noyaux h_n qui sont symétriques par rapport à leurs arguments $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$. Par suite on les supposera toujours symétriques.

Dans le cas particulier où le système ne comporte pas de noyau d'ordre supérieur à 1, le développement devient :

$$[I.1.3] \qquad y(t) = h_o + \int_o^{\infty} h_1(\tau)x(t-\tau)\, d\tau$$

Cette relation est celle qui lie l'entrée et la sortie d'un système linéaire dont la réponse impulsionnelle ou réponse à une fonction de Dirac est $h_1(\tau)$. D'autre part, cette relation lie l'entrée et la sortie d'un système non-linéaire dont on a linéarisé les équations. C'est pourquoi on appelle $h_1(\tau)$ le noyau linéaire du système non-linéaire.

Pour un système linéaire, la fonction de transfert est la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle. Par extension, on appelle fonction de transfert d'un système non-linéaire la transformée de Laplace du noyau linéaire $h_1(\tau)$.

Bien que l'expression [I.1.3] permette d'étudier le comportement d'un système non-linéaire excité par des signaux de faible amplitude, il est nécessaire de connaître au moins le noyau du second ordre pour étudier de façon plus précise le comportement du système.

I.2. - NOYAUX DE WIENER

Wiener a montré qu'il était possible d'exprimer y(t) au moyen d'un développement dérivé de celui de Volterra :

$$[I.2.1] \qquad y(t) = k_o + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\,[k_n, A, x(t)]$$

Dans ce développement k_o est une constante et les fonctionnelles G_n dépendent non seulement d'un noyau k_n et du signal x(t), mais aussi d'une constante A. Ces fonctionnelles G_n ont été calculées en supposant que chacune d'entre elles était un développement de Volterra limité à l'ordre n :

$$[I.2.2] \qquad \begin{cases} G_n\,[k_n^{(n)}, k_n^{(n-1)}, \ldots, k_n^{(o)}] = k_n^{(o)} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} V_i\,[k_n^{(i)}, x(t)] \\ \\ V_i\,[k_n^{(i)}, x(t)] = \displaystyle\int_o^{\infty} \cdots \int_o^{\infty} k_n^{(i)}(\tau_1, \ldots, \tau_i)\, x(t-\tau_1) \ldots x(t-\tau_i)\, d\tau_1 \ldots d\tau_i \end{cases}$$

Les noyaux $k_n^{(i)}$ ont été calculés en imposant à chaque fonctionnelle G_n d'être orthogonale à toute fonctionnelle V_m d'ordre m inférieur à n dans le cas où x(t) est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A. Cette condition est exprimée par la relation :

$$[I.2.3] \qquad \begin{cases} \overline{G_n\,[k_n^{(n)}, k_n^{(n-1)}, \ldots, k_n^{(o)}, A, x(t)] \cdot V_m\,[h_m, x(t)]} = 0 \\ m < n \\ x(t) : \text{bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \end{cases}$$

(La barre indique qu'on effectue la valeur moyenne de $G_n \cdot V_m$ par rapport à t).

Cette condition s'écrit sous la forme d'un système de n équations qui permet de déterminer les n noyaux $k_n^{(o)} \ldots k_n^{(n-1)}$. Ceux-ci s'expriment tous en fonction du noyau $k_n^{(n)}$ qu'on note plus simplement k_n et qu'on appelle noyau de Wiener d'ordre n : L'expression générale de la fonctionnelle G_n s'écrit :

[I.2.4]
$$\begin{cases} G_n[k_n,A,x(t)] = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n)\, d\tau_1\ldots d\tau_n \\ \qquad + \sum_{\upsilon=1}^{[\frac{n}{2}]} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k_n^{(n-2\upsilon)}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-2\upsilon})x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_{n-2\upsilon})d\tau_1 \ldots d\tau_{n-2} \\ \tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_n \leqslant t \\ k_n^{(n-2\upsilon)} = A^\upsilon\, a_{n,\upsilon} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k_n(\tau_1\ldots\tau_{n-2\upsilon},\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_\upsilon,\mu_\upsilon)\, d\mu_1\ldots d\mu \\ a_{n,\upsilon} = \dfrac{(-1)^\upsilon n!}{2^\upsilon(n-2\upsilon)!\upsilon!} = [1,3,5\ \ldots\ (2\upsilon-1)]\ (-1)^\upsilon\ C_n^{2\upsilon} \\ [\tfrac{n}{2}] = \text{partie entière de } \tfrac{n}{2} \end{cases}$$

Les fonctionnelles G_n se présentent donc sous la forme d'une somme d'intégrales de convolution multidimensionnelles. Les fonctionnelles d'ordre impair ne comprennent que des intégrales de convolution de dimension impaire. Les fonctionnelles d'ordre pair ne comprennent que des intégrales de convolution de dimension paire et un terme constant qui est :

[I.2.5]
$$\begin{cases} k_n^{(o)} = \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k_n\,(\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_{\frac{n}{2}},\mu_{\frac{n}{2}})\, d\mu_1 \ \ldots\ d\mu_{\frac{n}{2}} \\ \quad n : \text{pair} \end{cases}$$

Les coefficients $a_{n,\upsilon}$ sont les coefficients des termes de degré $n-2\upsilon$ du polynôme d'Hermite d'ordre n. Les premières fonctionnelles sont :

[I.2.6] $$G_1[k_1,A,x(t)] = \int_0^\infty k_1(\tau)x(t-\tau)\, d\tau$$

[I.2.7] $$G_2[k_2,A,x(t)] = \int_0^\infty \int_0^\infty k_2(\tau_1,\tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1\, d\tau_2 - A\int_0^\infty k_2(\mu,\mu)\, d\mu$$

[I.2.8] $$G_3[k_3,A,x(t)] = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty k_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3 - 3A\int_0^\infty\left[\int_0^\infty k_3(\tau,\mu,\mu)d\mu\right]x(t-\tau)\, d\tau$$

$$[I.2.9] \quad G_4\,[k_4,A,x(t)] = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty k_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)x(t-\tau_3)x(t-\tau_4)d\tau_1\,d\tau_2$$
$$d\tau_3 d\tau_4 - 6\,A\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^\infty k_4(\tau_1,\tau_2,\mu,\mu)d\mu\right]x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1\,d\tau_2$$
$$+ 3\,A^2\int_0^\infty\int_0^\infty k_4(\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\,d\mu_1\,d\mu_2$$

L'expression des noyaux $k_n^{(n-2\upsilon)}$ en fonction du noyau k_n (cf. [I.2.4]) suppose que le noyau k_n est symétrique relativement à ses arguments $\tau_1,\ldots,\tau_n$. De même que pour les fonctionnelles de Volterra, la forme des fonctionnelles G_n permet de considérer des noyaux k_n symétriques. Par suite les noyaux de Wiener seront toujours supposés symétriques.

La différence essentielle entre le développement de Volterra et le développement de Wiener réside dans le fait que les fonctionnelles de Wiener ne sont pas homogènes et qu'elles dépendent d'un paramètre A. Cependant les fonctionnelles de Wiener présentent la propriété d'être orthogonales dans le cas où x(t) est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A. Cette propriété peut être démontrée de façon simple. Pour cela, on considère une fonctionnelle G_n dépendant d'un noyau k_n et du paramètre A. D'autre part, on considère une autre fonctionnelle G_m, de degré m inférieur à n, dépendant du même paramètre A, et d'un noyau ℓ_m quelconque. On définit G_m au moyen de l'expression générale [I.2.2] :

$$[I.2.10] \quad G_m\,[\ell_m^{(m)},\ldots\,\ell_m^{(o)},A,x(t)] = \ell_m^{(o)} + \sum_{i=1}^{m} V_i\,[\ell_m^{(i)},x(t)]$$

Dans le cas où x(t) est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A, la fonctionnelle G_n est orthogonale à toute fonctionnelle V_m de degré m inférieur à n (cf. [I.2.3]); on peut donc écrire :

$$[I.2.11] \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{G_n\,[k_n^{(n)},\ldots\,k_n^{(o)},A,x(t)]\;V_i\,[\ell_m^{(i)},x(t)]} = 0 \\ \\ i \leqslant m < n \end{array} \right.$$

et par suite on peut écrire :

$$[I.2.12] \quad \overline{G_n\,[k_n^{(n)},\ldots\,k_n^{(o)},A,x(t)]\left[\ell_m^{(o)} + \sum_{i=1}^{m} V_i\,[\ell_m^{(i)},x(t)]\right]} = 0$$

On explicite G_m et on obtient :

$$[I.2.13] \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{G_n\,[k_n,A,x(t)]\;G_m\,[\ell_m,A,x(t)]} = 0 \\ \\ m < n \end{array} \right.$$

En supposant que n soit inférieur à m, on peut effectuer le même raisonnement et on obtient :

$$[I.2.14] \quad \begin{cases} \overline{G_m\,[\ell_m,A,x(t)]\;G_n\,[k_n,A,x(t)]} = 0 \\ n < m \end{cases}$$

Par suite, on démontre la propriété d'orthogonalité des fonctionnelles G_n en exprimant les relations [I.2.13] et [I.2.14] par :

$$[I.2.15] \quad \begin{cases} \overline{G_m\,[\ell_m,A,x(t)]\;G_n\,[k_n,A,x(t)]} = 0 \\ m \neq n \\ x(t) : \text{bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \end{cases}$$

D'autre part Wiener a démontré la relation suivante :

$$[I.2.16] \quad \begin{cases} \overline{G_n\,[\ell_n,A,x(t)] \cdot G_n\,[k_n,A,x(t)]} = n!A^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \ell_n(\sigma_1 \cdots \sigma_n) k_n(\tau_1 \cdots \tau_n) d\tau_1 \cdots d\tau_n \\ x(t) : \text{bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \end{cases}$$

La démonstration de cette relation utilise l'orthogonalité de G_n avec les fonctionnelles V_m d'ordre m inférieur à n et la valeur moyenne du produit des variables gaussiennes. Cette relation est fondamentale, car elle est la base du principe de la mesure des noyaux de Wiener, ainsi qu'il est montré au chapitre II.

Il est à remarquer que le développement en fonctionnelles G_n orthogonales entre elles n'est possible que dans le cas où ces fonctionnelles dépendent de noyaux k_n appartenant à l'espace L^2 des fonctions de carré sommable [2].

I.3. - RELATIONS ENTRE NOYAUX DE VOLTERRA ET NOYAUX DE WIENER

On considère un système dont la sortie y(t) peut être exprimée en fonction de x(t), soit par un développement de Volterra, soit par un développement de Wiener. Il y a donc identité entre les deux développements :

$$[I.3.1] \quad y(t) = h_o + \sum_{n=1}^{\infty} V_n\,[h_n,x(t)] = k_o + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\,[k_n,A,x(t)]$$

Il en résulte qu'on peut identifier chaque fonctionnelle V_n, qui est une intégrale de convolution de dimension n, avec la somme de toutes les intégrales de convolution de dimension n contenues dans le développement de Wiener :

$$[I.3.2] \quad \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty h_n(\tau_1,\ldots\tau_n)x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n = \sum_{i=o}^{\infty} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty k_{n+2i}^{(n)}(\tau_1,\ldots\tau_n)\, x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n)\, d\tau_1\ldots d\tau_n$$

(cf. Annexe I).

Le signal x(t) étant quelconque cette identité implique que le noyau h_n et les noyaux de Wiener sont liés par la relation :

$$[I.3.3] \qquad h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{n+2i}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

En explicitant les noyaux $k_{n+2i}^{(n)}$ en fonction des noyaux de Wiener k_{n+2i}, cette relation devient :

$$[I.3.4] \qquad h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = k_n(\tau_1,\ldots\tau_n) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i[1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{n+2i}^{2i}\, A^i \int_0^{\infty}\!\!\ldots\int_0^{\infty} k_{n+2i}(\tau_1,\ldots\tau_n,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i)\,d\mu_1\ldots d\mu_i$$

Cette relation montre qu'un noyau de Volterra d'ordre n se développe en une série dont le terme d'ordre i est une intégrale de dimension i du noyau k_{n+2i} dans lequel 2i variables sont égales deux à deux. Le coefficient de cette intégrale dépend de la $i^{ème}$ puissance de A et du coefficient du terme de degré n du polynôme d'Hermite d'ordre n+2i.

A partir de la relation [I.3.4] et au moyen d'un raisonnement par récurrence, on démontre [cf. Annexe II] que la relation qui lie un noyau de Wiener d'ordre n aux noyaux de Volterra est :

$$[I.3.5] \qquad k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) + \sum_{i=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{n+2i}^{2i}\, A^i \int_0^{\infty}\!\!\ldots\int_0^{\infty} h_{n+2i}(\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i)\,d\mu_1\ldots d\mu_1$$

Cette relation montre qu'un noyau de Wiener d'ordre n se développe en une série dont le terme d'ordre i est une intégrale de dimension i du noyau h_{n+2i} dans lequel 2i variables sont égales par groupe de deux. Le coefficient de cette intégrale dépend de la $i^{ème}$ puissance de A et de la valeur absolue du coefficient du terme de degré n du polynôme d'Hermite d'ordre n+2i.

L'expression [I.3.5] montre clairement que les noyaux de Wiener ne dépendent pas seulement des noyaux de Volterra, c'est-à-dire des caractéristiques du système, mais aussi de la densité spectrale A dont ils sont une fonction. D'autre part, pour que ces noyaux soient définis, il est nécessaire que les séries qui les expriment soient convergentes. La convergence de ces séries dépend des noyaux de Volterra du système et de A. Il n'est donc pas évident a priori que tout système qui a des noyaux de Volterra ait aussi des noyaux de Wiener.

D'autre part, si les noyaux de Wiener sont définis, et si A tend vers zéro, les noyaux de Wiener tendent vers les noyaux de Volterra; en effet, d'après [I.3.5] :

$$[I.3.6] \qquad \text{si } A \longrightarrow 0 \Longrightarrow k_n(\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_n) \longrightarrow h_n(\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_n).$$

CHAPITRE II : METHODE DE MESURE DES NOYAUX DE WIENER

II.1. - METHODE GENERALE DE MESURE DES NOYAUX DE WIENER

On considère un système dont la sortie y(t) est développable en une série de Wiener de noyaux k_n :

$$[II.1.1] \quad y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n\,[k_n, A, x(t)]$$

Soit, d'autre part, un système qui est caractérisé par un seul noyau de Wiener : ℓ_m. La sortie z(t) d'un tel système est :

$$[II.1.2] \quad z(t) = G_m\,[\ell_m, A, x(t)]$$

On considère le cas où ces deux systèmes sont excités par un même bruit blanc gaussien, x(t), de densité spectrale A, et on calcule la valeur moyenne du produit des sorties de ces systèmes :

$$[II.1.3] \quad \overline{y(t)z(t)} = \overline{G_m\,[\ell_m, A, x(t)] \sum_{n=0}^{\infty} G_n\,[k_n, A, x(t)]}$$

soit :

$$[II.1.4] \quad \overline{y(t)z(t)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} G_m\,[\ell_m, A, x(t)]\; G_n\,[k_n, A, x(t)]}$$

Les fonctionnelles de Wiener ayant la propriété d'être orthogonales entre elles [cf. I.2.15], la relation [II.1.4] se réduit à :

$$[II.1.5] \quad \overline{y(t)z(t)} = \overline{G_m\,[\ell_m, A, x(t)]\; G_m\,[k_m, A, x(t)]}$$

En appliquant la relation [I.2.16], on explicite $\overline{y(t)z(t)}$ en fonction des noyaux k_m et ℓ_m :

$$[II.1.6] \quad \overline{y(t)z(t)} = m!A^m \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \ell_m(\tau_1, \ldots \tau_m)\; k_m\,(\tau_1, \ldots \tau_m)\; d\tau_1 \ldots d\tau_m$$

On considère maintenant que le noyau ℓ_m est un produit de retards purs :

$$[II.1.7] \quad \begin{cases} \ell_m(\tau_1, \ldots \tau_m) = \delta(\tau_1 - \sigma_1) \ldots \delta(\tau_m - \sigma_m) \\ \delta(\tau) : \text{fonction de Dirac} \end{cases}$$

Le second membre de la relation [II.1.6] s'intègre immédiatement, et on obtient le résultat suivant :

$$[II.1.8] \quad \overline{y(t)z(t)} = m!A^m \, k_m(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$$

On cherche ensuite à exprimer en fonction de x(t) la sortie z(t) du système caractérisé par un seul noyau ℓ_m qui est un produit de retards purs. Pour cela il suffit d'expliciter la fonctionnelle G_m. Le calcul effectué en Annexe III montre que :

$$[II.1.9] \quad \begin{cases} z(t) = x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2) \ \ldots \ x(t-\sigma_m) \\ \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

Par suite la relation [II.1.8] devient :

$$[II.1.10] \quad \overline{y(t)x(t-\sigma_1) \ \ldots \ x(t-\sigma_m)} = m!A^m \, k_m(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$$

On conclut donc que le noyau k_m s'exprime en fonction de la sortie y(t) et de l'entrée x(t) du système dans le cas où x(t) est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A. La fonction de y(t) et de x(t) est communément appelée fonction d'intercorrélation du $m^{ième}$ ordre entre y(t) et x(t) :

$$[II.1.11] \quad \begin{cases} k_m(\sigma_1,\ldots \ \sigma_m) = \dfrac{1}{m!A^m} \, \Phi^{(m)}_{yx} \ (\sigma_1,\ldots \ \sigma_m) \\ \Phi^{(m)}_{yx} \ (\sigma_1,\ldots \ \sigma_m) = \lim_{T\to\infty} \left[\dfrac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t-\sigma_1) \ \ldots \ x(t-\sigma_m) \ dt \right] \\ \sigma_i \neq \sigma_j \\ x(t) : \text{bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \end{cases}$$

La relation [II.1.11] montre que la mesure des noyaux de Wiener se ramène à la mesure des fonctions d'intercorrélation entre la sortie et l'entrée du système, celui-ci étant excité par un bruit blanc gaussien de densité spectrale A. Le noyau d'ordre m est mesuré à partir de la fonction d'intercorrélation d'ordre m. D'autre part, il est à remarquer que le noyau $k_m(\sigma_1,\ldots \ \sigma_m)$ mesuré par cette méthode, est a fortiori symétrique relativement à ses arguments $\sigma_1,\ldots \ \sigma_m$, les retards $\sigma_1,\ldots \ \sigma_m$ ayant des rôles absolument interchangeables dans l'expression de $\Phi^{(m)}_{yx}$. Cependant, il ne sera pas possible de mesurer les valeurs de k_m pour les valeurs des retards telles que $\sigma_i = \sigma_j$.

II.2. - APPLICATION A LA MESURE DES NOYAUX DE WIENER D'UN SYSTEME CARACTERISE PAR SES NOYAUX DE VOLTERRA

Soit un système dont la sortie y(t) est développable en une série de Volterra de noyaux h_n. On calcule les noyaux de Wiener de ce système en appliquant la méthode définie précédemment (cf. § II.1). Pour cela on considère que le système est excité par un bruit blanc gaussien x(t) de densité spectrale A et on calcule la fonction d'intercorrélation d'ordre m entre y(t) et x(t) :

$$[II.2.1] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(m)}(\sigma_1,\dots \sigma_m) = \overline{y(t)x(t-\sigma_1) \dots x(t-\sigma_m)} \\ y(t) = h_o + \sum_{n=1}^{\infty} \int_o^{\infty}\dots\int_o^{\infty} h_n(\tau_1,\dots,\tau_n)x(t-\tau_1)\dots x(t-\tau_n)\, d\tau_1 \dots d\tau_n \\ x(t) : \text{bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \end{cases}$$

En explicitant y(t) dans $\Phi_{yx}^{(m)}$ et en changeant l'ordre des intégrations, $\Phi_{yx}^{(m)}$ s'écrit :

$$[II.2.2] \quad \Phi_{yx}^{(m)} = h_o\overline{x(t-\sigma_1)\dots x(t-\sigma_m)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_o^{\infty}\dots\int_o^{\infty} h_n(\tau_1,\dots\tau_n) \overline{x(t-\tau_1)\dots x(t-\tau_n)x(t-\sigma_1)\dots x(t-\sigma_m)}\, d\tau_1 \dots d\tau_n$$

Cette relation fait apparaître des fonctions communément appelées fonctions d'autocorrélation du signal x(t). La fonction d'autocorrélation d'ordre k du signal x(t) est définie par la relation :

$$[II.2.3] \quad \Phi_{xx}^{(k)}(\sigma_1,\dots \sigma_k) = \overline{x(t)x(t-\sigma_1) \dots\dots x(t-\sigma_k)}$$

En effectuant le changement de variable :

$$t-\sigma_1 = \lambda$$

on explicite la relation [II.2.2] en fonction des fonctions d'autocorrélation de x(t) :

$$[II.2.4] \quad \Phi_{yx}^{(m)} = h_o\, \Phi_{xx}^{(m-1)}(\sigma_1-\sigma_2,\dots,\sigma_1-\sigma_m) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_o^{\infty}\dots\int_o^{\infty} h_n(\tau_1,\dots\tau_n)\, \Phi_{xx}^{(n+m-1)} (\sigma_1-\sigma_2,\dots\sigma_1-\sigma_m,\sigma_1-\tau_1,\dots\sigma_1-\tau_n)d\tau_1\dots d\tau_n$$

Le signal x(t) étant un bruit blanc gaussien de densité spectrale A, ses fonctions d'autocorrélation d'ordre pair sont nulles et celles d'ordre impair s'expriment sous la forme d'une somme de produits de fonctions de Dirac dépendant des variables τ_i et des retards σ_i. Dans le cas où les retards σ_i sont choisis tous différents les uns des autres, le calcul des intégrales multidimensionnelles du développement $\Phi_{yx}^{(m)}$ s'effectue de façon simple, et on obtient :

$$[II.2.5] \quad \Phi_{yx}^{(m)}(\sigma_1,\ldots\sigma_m) = m!A^m \left[h_m(\sigma_1,\ldots,\sigma_m) + \sum_{i=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{m+2i}^{2i}\, A^i \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} h_{m+2i}(\sigma_1,\ldots\sigma_m,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1\ldots d\mu_i \right]$$

Comme d'après la relation [II.1.11], le noyau de Wiener k_m a pour expression :

$$[II.2.6] \quad k_m(\sigma_1,\ldots\ \sigma_m) = \frac{1}{m!A^m}\, \Phi_{yx}^{(m)}(\sigma_1,\ldots\ \sigma_m)$$

il s'ensuit que :

$$[II.2.7] \quad k_m(\sigma_1,\ldots\sigma_m) = h_m(\sigma_1\ldots\sigma_m) + \sum_{i=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{m+2i}^{2i}\, A^i \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} h_{m+2i}(\sigma_1,\ldots\sigma_m,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i)\, d\mu_i\ldots d\mu_i$$

L'expression des noyaux de Wiener en fonction des noyaux de Volterra du système, obtenue par cette méthode, est identique à l'expression [I.3.5] calculée à partir des fonctionnelles de Wiener. En Annexe IV on a effectué le calcul des noyaux de Wiener du premier et second ordre au moyen de la méthode d'intercorrélation.

CONCLUSION

Pour les systèmes non-linéaires dont les relations sortie-entrée sont exprimées par des équations intégro-différentielles, noyaux de Volterra et noyaux de Wiener sont calculables dans la mesure où tous les paramètres de ces équations sont connus. Si ces paramètres ou ces équations sont inconnus, les noyaux de Wiener peuvent être mesurés. La méthode consiste à exciter l'entrée du système à identifier, au moyen d'un bruit blanc gaussien, et à mesurer les valeurs des fonctions d'intercorrélation sortie-entrée. De ces valeurs sont déduites les valeurs du noyau de Wiener d'ordre correspondant à celui de la fonction d'intercorrélation considérée, par application de la relation :

$$\begin{cases} k_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \dfrac{1}{n!A^n}\, \Phi_{yx}^{(n)}\ (\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ \sigma_i \neq \sigma_j \\ A : \text{densité spectrale du bruit blanc gaussien} \end{cases}$$

Dans la mesure où tous les noyaux de Wiener sont mesurés, les noyaux de Volterra peuvent être calculés au moyen de la relation :

$$h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = k_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i\, [1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{n+2i}^{2i}\, A^i \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} k_{n+2i}\ (\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

Bien sûr, ce calcul est impossible si le système comporte un nombre infini de noyaux. Dans ce cas, les noyaux de Wiener doivent être mesurés en utilisant un bruit blanc gaussien de densité spectrale très faible de telle sorte que les noyaux de Wiener et de Volterra puissent être confondus. Dans ce cas, le noyau de Wiener est une estimation du noyau de Volterra :

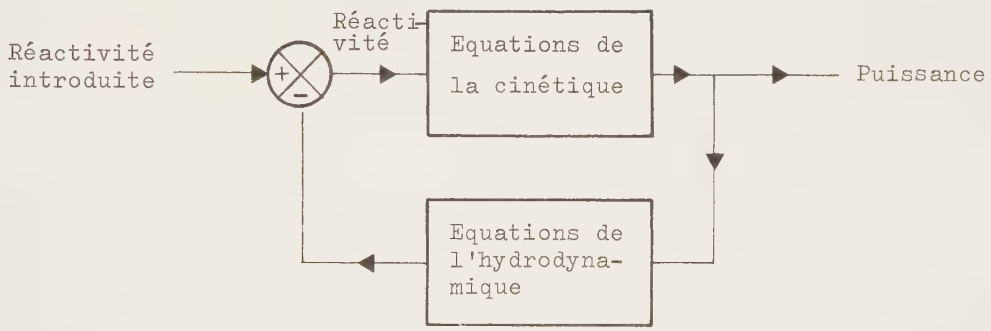
$$\begin{cases} h_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \simeq k_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ A \ll 1 \end{cases}$$

DEUXIEME PARTIE

PRINCIPE D'UNE METHODE DE MESURE DES NOYAUX CARACTERISTIQUES DE LA RELATION PUISSANCE-REACTIVITE D'UN REACTEUR A BASSE PUISSANCE

INTRODUCTION

Pour un réacteur à eau légère du type piscine, la relation puissance-réactivité introduite peut être décrite par le schéma-bloc suivant :



qui comprend : — une boucle directe définie par les équations de la cinétique;

— une boucle de réaction négative due à la thermique et définie par les équations de l'hydrodynamique.

Dans le cas où la puissance du réacteur est suffisamment faible pour que les effets de la thermique aient une influence négligeable sur la réactivité résultante, le fonctionnement du réacteur peut être décrit de façon assez précise par les seules équations de la cinétique. Par ailleurs, si la puissance du réacteur est cependant suffisamment forte pour que les effets de la source de neutrons puissent être négligés, ces équations peuvent s'écrire sans terme de source :

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{k(t) - \beta}{\Lambda}\, n(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, C_j(t) \\ \dfrac{dC_j}{dt} = \dfrac{\beta_j}{\Lambda}\, n(t) - \lambda_j\, C_j(t) \end{cases}$$

où : $n(t)$: puissance neutronique du réacteur

$k(t)$: réactivité

Λ : temps de vie moyen des neutrons

C_j : nombre d'émetteurs en neutrons retardés du groupe j, ou concentration des précurseurs du groupe j

λ_j : constante de décroissance des précurseurs de neutrons retardés du groupe j

β_j : nombre de neutrons retardés du groupe j

β : $\left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j\right)$ nombre total de neutrons retardés.

Ce système d'équations décrit donc le fonctionnement en boucle ouverte du réacteur.

Au moyen des résultats obtenus en Première Partie, nous cherchons alors à définir une méthode de mesure des noyaux caractéristiques de ce système d'équations. En premier lieu, nous essayons d'appliquer directement la méthode de mesure des noyaux de Wiener. Dans ce but, au chapitre III, nous calculons et développons la solution intégrale des équations de la cinétique de façon à faire apparaître explicitement les noyaux de Volterra. Au chapitre IV, nous utilisons les relations établies au chapitre I pour déduire les noyaux de Wiener des noyaux de Volterra. Il apparaît alors que, les noyaux de Wiener n'ayant pas d'existence réelle, la méthode générale définie en Première Partie est inapplicable. Cependant, une interprétation physique de l'inexistence des noyaux de Wiener nous conduit à élaborer une nouvelle méthode statistique permettant de mesurer les noyaux de Volterra des équations de la cinétique.

CHAPITRE III : CALCUL DE LA REPONSE EN PUISSANCE D'UN REACTEUR EN BOUCLE OUVERTE SOUMIS A UN SIGNAL DE REACTIVITE QUELCONQUE

III.1. - SOLUTION INTEGRALE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

Soit les équations de la cinétique à m groupes et sans terme de source :

$$[III.1.1] \quad \begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{k(t) - \beta}{\Lambda}\, n(t) + \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \lambda_j\, C_j(t) \\ \\ \dfrac{dC_j}{dt} = \dfrac{\beta_j}{\Lambda}\, n(t) - \lambda_j\, C_j(t) \end{cases}$$

dans lesquelles les variables $n(t)$, $k(t)$ et $C_j(t)$ représentent respectivement la puissance neutronique, la réactivité, et la concentration des précurseurs du groupe j.

Le réacteur étant considéré initialement stable, la réactivité est nulle et :

$$[III.1.2] \quad \begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{dC_j}{dt} = 0 \\ \\ t < 0 \end{cases}$$

Par suite la puissance initiale n_o est liée aux concentrations initiales C_{jo} pour les relations :

$$[III.1.3] \quad \begin{cases} -\dfrac{\beta}{\Lambda}\, n_o + \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j\, C_{jo} = 0 \\ \\ \dfrac{\beta_j}{\Lambda}\, n_o - \lambda_j\, C_{jo} = 0 \end{cases}$$

On suppose alors qu'à l'instant t=0, le réacteur est soumis à une perturbation de réactivité $\Delta k(t)$ qui engendre des variations $\Delta n(t)$ de la puissance et $\Delta C_j(t)$ des concentrations C_j. On cherche à exprimer les variations de la puissance en fonction de la perturbation de réactivité. Pour cela on écrit le système d'équations [III.1.1] en exprimant $n(t)$ et $C_j(t)$ par les relations :

$$[III.1.4] \quad \begin{cases} n(t) = n_o + \Delta n(t) \\ \\ C_j(t) = C_{jo} + \Delta C_j(t) \end{cases}$$

En tenant compte des relations [III.1.3] ce système est :

$$[\text{III.1.5}] \quad \begin{cases} \dfrac{d\Delta n}{dt} = \dfrac{\Delta n(t)\ \Delta k(t)}{\Lambda} + \dfrac{n_o}{\Lambda}\Delta k(t) - \dfrac{\beta}{\Lambda}\Delta n(t) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j\ \Delta C_j(t) \\ \dfrac{d\Delta C_j}{dt} = \dfrac{\beta_j}{\Lambda}\Delta n(t) - \lambda_j\ \Delta C_j(t) \end{cases}$$

On résout ce système au moyen de la transformation de Laplace. En notant :

$$Y(p) = \mathcal{L}\left[\frac{\Delta n}{n_o}(t)\right]$$

$$X(p) = \mathcal{L}\left[\Delta k(t)\right]$$

$$Z_j(p) = \mathcal{L}\left[\Delta C_j(t)\right]$$

On obtient l'expression de Y(p) suivante :

$$[\text{III. 1.6}] \quad Y(p) = G(p)\ X(p) + \mathcal{L}\left[\frac{\Delta n(t)}{n_o}\ \Delta\ k(t)\right]\ G(p)$$

dans laquelle :

$$[\text{III. 1.7}] \quad G(p) = \frac{1}{p\left[\Lambda + \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta j}{p+\lambda\ j}\right]}$$

La solution intégrale des équations de la cinétique est alors obtenue en effectuant la transformation inverse de Laplace de Y(p) :

$$[III.1.8]\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta n(t)}{n_o} = \displaystyle\int_o^t g(\tau)\, u(\tau)\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau + \int_o^t g(\tau)\, u(\tau)\, \dfrac{\Delta n(t-\tau)}{n_o}\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau \\ g(t)\, u(t) = \mathcal{L}^{-1}\,[G(p)] \\ u(t) : \text{fonction de Heaviside ou fonction échelon unitaire.} \end{cases}$$

Par suite, la variation relative de puissance $\frac{\Delta n(t)}{n_o}$ est définie par une équation intégrale connue sous le nom d'équation intégrale de Volterra. Dans cette équation interviennent la perturbation de réactivité $\Delta k(t)$ et une fonction $g(t)u(t)$ qui n'est autre que la transformée inverse de Laplace de la fonction de transfert en boucle ouverte d'un réacteur, notée ici $G(p)$.

Il est possible de résoudre cette équation par une méthode d'itérations successives. La solution se présente alors sous la forme d'un développement de Volterra.

III.2. - CALCUL DES NOYAUX DE VOLTERRA DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

Le calcul de ces noyaux s'effectue simplement en résolvant l'équation intégrale [III.1.8] par itérations successives, et en mettant chaque solution approchée à l'ordre n sous la forme d'un développement de Volterra limité à l'ordre n.

Comme initialement les fonctions $\frac{\Delta n(t)}{n_o}$ et $\Delta k(t)$ sont nulles, les fonctions $\Delta k(t-\tau)$ et $\frac{\Delta n}{n_o}(t-\tau)$ sont nulles pour les valeurs de τ supérieures à t, de telle sorte qu'on peut écrire l'équation [III.1.8] sous la forme :

$$[III.2.1]\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta n}{n_o}(t) = \displaystyle\int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\, \dfrac{\Delta n}{n_o}(t-\tau)\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau \\ \left.\begin{array}{l} \Delta k(t) = 0 \\ \dfrac{\Delta n}{n_o}(t) = 0 \end{array}\right\} \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

La solution approchée à l'ordre 1 de cette équation est :

$$[III.2.2]\quad \frac{\Delta n_1}{n_o}(t) = \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau$$

c'est-à-dire la solution des équations de la cinétique linéarisées

La solution approchée à l'ordre 2 est obtenue en substituant dans l'équation [III.2.1] $\frac{\Delta n}{n_o}(t)$ par sa solution approchée $\frac{\Delta n_1}{n_o}(t)$:

$$[III.2.3]\quad \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_1}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\, \frac{\Delta n_1}{n_o}(t-\tau)\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau$$

soit :

$$[III.2.4] \quad \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_1}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\ \Delta k(t-\tau) \left[\int_o^\infty g(\lambda)u(\lambda)\ \Delta k(t-\tau-\lambda)\ d\lambda \right] d\tau$$

On effectue alors les changements de variables suivants :

$$\tau = \tau_1 \Longrightarrow d\tau_1 = d\tau$$

$$\tau+\lambda = \tau_2 \Rightarrow \begin{cases} d\tau_2 = d\lambda \\ \lambda = \tau_2 - \tau = \tau_2 - \tau_1 \end{cases}$$

d'où

$$[III.2.5] \quad \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_1}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau_1)u(\tau_1)\ \Delta k(t-\tau_1) \left[\int_{\tau_1}^\infty g(\tau_2-\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\Delta k(t-\tau_2)d\tau_2 \right] d\tau_1$$

Comme d'autre part on a :

$$[III.2.6] \quad g(\tau_2-\tau_1)u(\tau_2-\tau_1) = 0 \qquad \text{pour } \tau_2 < \tau_1$$

on peut aussi écrire :

$$[III.2.7] \quad \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_1}{n_o}(t) + \int_o^\infty \int_o^\infty g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\ \Delta k(t-\tau_1)\ \Delta k(t-\tau_2)\ d\tau_1\ d\tau_2$$

En exprimant $\frac{\Delta n_1}{n_o}(t)$ selon [III.2.2] on obtient finalement l'expression de la solution approchée au second ordre :

$$[III.2.8] \quad \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) = \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau + \int_o^\infty\int_o^\infty g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\Delta k(t-\tau_1)\ \Delta k(t-\tau_2)\ d\tau_1\ d\tau_2$$

On peut calculer ensuite la solution approchée au troisième ordre, puis généraliser le calcul pour un ordre k quelconque. Les calculs effectués en Annexe V montrent que la solution de l'équation [III.2.1] est un développement de Volterra dont les noyaux sont définis par la relation :

$$[III.2.9] \quad h_k(\tau_1,\ldots\tau_k) = g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)\ \ldots\ g(\tau_k-\tau_{k-1})u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\ \ldots\ u(\tau_k-\tau_{k-1})$$

$$[III.2.10] \quad \frac{\Delta n}{n_o}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_o^\infty \ldots \int_o^\infty h_k(\tau_1,\ldots,\tau_k)\ \Delta k(t-\tau_1)\ldots\Delta k(t-\tau_k)\ d\tau_1\ \ldots\ d\tau_k$$

Comme tous les noyaux de Volterra des équations de la cinétique sont exprimés au moyen de la fonction $g(\tau)u(\tau)$, l'expression analytique de cette fonction permet le calcul des expression de tous les noyaux de Volterra des équations de la cinétique. Le calcul de l'expression analytique de la fonction $g(\tau)u(\tau)$ est effectuée au paragraphe III.3.

III.3. - EXPRESSION DU NOYAU DE VOLTERRA DU PREMIER ORDRE

D'après le paragraphe III.2, le noyau du premier ordre est $g(\tau)u(\tau)$. Cette fonction a été définie au paragraphe III.1 par les relations :

$$[III.3.1] \quad \begin{cases} g(t)u(t) = \mathcal{L}^{-1}\,[G(p)] \\ G(p) = \dfrac{1}{p\left[\Lambda + \sum_{j=1}^{m} \dfrac{\beta_j}{p+\lambda_j}\right]} \end{cases}$$

Pour calculer la transformée inverse de Laplace de G(p), on met G(p) sous la forme suivante :

$$[III.3.2] \quad G(p) = \frac{\prod_{j=1}^{m} (p+\lambda_j)}{\Lambda p\,[p^m + a_{m-1}\,p^{m-1} + \ldots + a_1 p + a_o]}$$

Cette expression fait apparaître les zéros $-\lambda_1$, $-\lambda_2$ ... $-\lambda_m$ de G(p), qui sont tous négatifs et réels. On met, ensuite, le dénominateur de G(p) sous la forme d'un produit de facteurs. Pour cela on calcule les racines de l'équation :

$$[III.3.3] \quad p^m + a_{m-1}\,p^{m-1} + \ldots + a_1\,p + a_o = 0$$

Les coefficients a_{m-1} ... a_o étant tous non nuls, ces racines sont toutes réelles et négatives et sont les pôles simples non nuls de G(p) [7]. On note $-\gamma_1$, $-\gamma_2$, ... $-\gamma_m$ les valeurs de ces pôles, de telle sorte que G(p) s'écrit :

$$[III.3.4] \quad G(p) = \frac{\prod_{j=1}^{m} (p+\lambda_j)}{p \prod_{j=1}^{m} (p+\gamma_j)}$$

Enfin, on décompose G(p) en une somme de fractions partielles :

$$[III.3.5] \quad G(p) = \frac{1}{\Lambda}\left[\frac{A_o}{p} + \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{p+\gamma_j}\right]$$

Le coefficient A_o se calcule en multipliant par p l'expression [III.3.5] de G(p) et en attribuant à p une valeur nulle. De même, le coefficient A_j (pour $j \neq 0$) se calcule en multipliant par $(p+\gamma_j)$ l'expression [III.3.5] de G(p) et en attribuant à p la valeur $-\gamma_j$. Les coefficients A_i ainsi calculés sont tous positifs [7].

[III.3.6]
$$\begin{cases} A_i = \dfrac{\prod_{j=1}^{m} (-\gamma_i + \lambda_j)}{-\Lambda \gamma_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} (\gamma_j - \gamma_i)} \\ A_o = \dfrac{\prod_{j=1}^{m} \lambda_j}{\Lambda \prod_{j=1}^{m} \gamma_j} \end{cases}$$

Le calcul de la transformée inverse de Laplace de G(p) est alors immédiat :

[III.3.7]
$$g(t)u(t) = \frac{1}{\Lambda} \left[A_o + \sum_{j=1}^{m} A_j \, e^{-\gamma_j t} \right] u(t)$$

La fonction g(t)u(t) est donc la somme d'une constante et de m exponentielles à coefficient négatif. Il s'ensuit que :

[III.3.8]
$$\lim_{t \to \infty} [g(t)u(t)] = \frac{A_o}{\Lambda}$$

et il apparaît alors que la fonction g(t)u(t) n'est pas une fonction de carré sommable.

CHAPITRE IV : CALCUL DES NOYAUX DE WIENER DU PREMIER ET SECOND ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

IV.1. - SYMETRISATION DES NOYAUX DE VOLTERRA DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

Le calcul des noyaux de Wiener s'effectue au moyen de la relation [I.3.5] qui lie un noyau de Wiener à l'ensemble des noyaux de Volterra caractérisant le système. Dans cette relation, les noyaux de Volterra sont supposés symétriques. Or l'expression [III.2.9] des noyaux de Volterra des équations de la cinétique montre clairement que ces noyaux ne sont pas symétriques. Il est donc nécessaire de les symétriser.

Tout d'abord, pour alléger l'écriture de ces noyaux, on définit la fonction $G(\tau)$ telle que :

[IV.1.1] $$G(\tau) = g(\tau)u(\tau)$$

de telle sorte que l'expression [III.2.9] des noyaux de Volterra devient :

[IV.1.2] $$h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = G(\tau_1)\, G(\tau_2-\tau_1) \ldots G(\tau_n-\tau_{n-1})$$

On écrit alors cette expression sous une forme symétrique où les n arguments $\tau_1,\ldots,\tau_n$ jouent le même rôle et sont permutables de toutes les façons possibles sans que cette expression soit changée :

[IV.1.3] $$h_n(\tau_1,\ldots\tau_n) = \frac{1}{n!}\,[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) \ldots G(\tau_n-\tau_{n-1})]^*$$

n! représente le nombre des permutations qu'on peut effectuer sur les n arguments $\tau_1 \ldots \tau_n$, et le signe * signifie qu'on effectue la somme des fonctions non symétriques telles que celle à laquelle l'opération * s'applique, et que ces fonctions sont écrites avec toutes les permutations possibles des n arguments. Cette somme comprend donc n! termes.

IV.2. - CALCUL DU NOYAU DE WIENER DU PREMIER ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

Le calcul de ce noyau s'effectue à partir de la relation générale [I.3.5] dans laquelle on prend n = 1 :

[IV.2.1] $$k_1(\tau) = h_1(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} [1.3\ldots(2i-1)]C_{1+2i}^{2i}\, A^i \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} h_{1+2i}(\tau,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i$$

D'après la relation [III.2.9], on a :

[IV.2.2] $\quad h_1(\tau) = G(\tau)$

On cherche ensuite à exprimer les noyaux $h_{1+2i}(\tau,\mu_1,\mu_1 \ldots \mu_i,\mu_i)$ en fonction de G. Pour cela on calcule d'abord les noyaux $h_3(\tau,\mu,\mu)$ et $h_5(\tau,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)$ puis on généralise le mode de calcul de ces noyaux. On obtient alors :

[IV.2.3]
$$\left\{\begin{array}{l} h_{1+2i}(\tau,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i) = \dfrac{2^i \cdot i!}{(1+2i)!}\, G(o)^i \Big[G(\tau)\, G(\mu_1-\tau)\, G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1}) \\ \qquad + G(\mu_1) \displaystyle\sum_{k=1}^{i} G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1}) G(\tau-\mu_k) G(\mu_{k+1}-\tau) \\ \qquad\qquad G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1}) \ldots G(\mu_i-\mu_{i-1}) \\ k-1 \geqslant 1 \\ k+1 \leqslant i \\ k+2 \leqslant i \end{array}\right.$$

Les calculs effectués en Annexe VI-a montrent que le coefficient qui est en facteur dans cette expression fait intervenir la $i^{ème}$ puissance de G(o), 2^i représente le nombre de permutations qu'on peut opérer sur les deux termes des i couples de variables $\mu_1,\mu_1 \ldots \mu_i,\mu_i$ sans changer l'ordre de succession des indices, et i! qui est le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les i variables $\mu_1 \ldots \mu_i$, (1+2i)! provenant de la symétrisation du noyau h_{1+2i} (cf. § IV.1).

Il suffit alors de calculer le terme courant de l'expression [IV.2.1], c'est-à-dire :

[IV.2.4] $$[1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{1+2i}^{2i}\, A^i \int_o^\infty \ldots \int_o^\infty h_{1+2i}\,(\tau,\mu_1,\mu_1, \ldots \mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i$$

dans lequel on exprime h_{1+2i} selon son expression [IV.2.3] de telle sorte que ce terme courant se développe en une somme de (i+1) intégrales. Cette somme est multipliée par le coefficient :

[IV.2.5] $$[1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{1+2i}^{2i}\, A^i\, \frac{2^i.i!}{(1+2i)!}\, G(o)^i = [1.3.5\ldots(2i-1)]\, \frac{\cancel{(1+2i)!}}{2i!}\, \frac{2^i.i!}{\cancel{(1+2i)!}}\, A^i\, G(o)^i$$

$$= A^i\, G(o)^i$$

Les calculs effectués en Annexe [VI-b] montrent que cette somme d'intégrales a pour expression :

[IV.2.6] $$\sum_{k=o}^{i} G(\tau)^{*(k+1)} \int_o^\infty G(\lambda)^{*(i-k)}\, d\lambda$$

dans laquelle le signe * représente l'opérateur de convolution, et l'indice qui le suit représente la dimension du produit de convolution obtenu; ainsi :

$$[IV.2.7]\quad \begin{cases} G(\tau)^{*(o)} = \delta(\tau) \\ G(\tau)^{*(1)} = G(\tau) \\ G(\tau)^{*(2)} = G(\tau) * G(\tau) \\ \vdots \\ G(\tau)^{*(k)} = G(\tau) * G(\tau) \cdots * G(\tau) \qquad (k \text{ termes successifs}) \end{cases}$$

Par suite l'expression [IV.2.1] du noyau de Wiener du premier ordre devient :

$$[IV.2.8]\quad k_1(\tau) = G(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} A^i\, G(o)^i \sum_{k=o}^{i} G(\tau)^{*(k+1)} \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)}\, d\lambda$$

En changeant l'ordre des sommations, il est possible d'écrire cette expression sous une forme plus simple [cf. Annexe VI-c] :

$$[IV.2.9]\quad \begin{cases} k_1(\tau) = [G(\tau) * \delta(\tau)] \int_o^{\infty} S(\lambda)\, d\lambda \\ S(\lambda) = \sum_{j=o}^{\infty} A^j\, G(o)^j\, G(\lambda)^{*(j)} \end{cases}$$

IV.3. - CALCUL DU NOYAU DE WIENER DU SECOND ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

De même que pour le noyau du premier ordre, le calcul de ce noyau s'effectue à partir de la relation [I.3.5] dans laquelle on pose n=2 :

$$[IV.3.1]\quad k_2(\tau_1,\tau_2) = h_2(\tau_1,\tau_2) + \sum_{i=1}^{\infty} [1.3\ldots(2i-1)]\, C_{2+2i}^{2i}\, A^i \int_o^{\infty}\!\!\ldots\!\int_o^{\infty} h_{2+2i}(\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1\ldots\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1\ldots d\mu_i$$

D'après la relation [III.2.9] on a :

$$[IV.3.2]\quad h_2(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_1)\, G(\tau_2-\tau_1)$$

D'autre part, les calculs effectués en annexe VII-a montrent que l'expression générale des noyaux h_{2+2i} en fonction de G est :

$$[IV.3.3]\quad \left\{\begin{array}{l} h_{2+2i}(\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i) = \dfrac{2^{i+1}\cdot i!}{(2+2i)!}\,G(o)^i\Big[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)G(\mu_1-\tau_2)G(\mu_2-\mu_1)\\ \qquad\qquad \ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\\ \quad + G(\tau_1)G(\mu_1-\tau_1)\displaystyle\sum_{k=1}^{i} G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau_2-\mu_k)G(\mu_{k+1}-\tau_2)G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\\ \qquad\qquad \ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\\ \quad + G(\mu_1)\displaystyle\sum_{k=1}^{i} G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau_1-\mu_k)G(\tau_2-\tau_1)G(\mu_{k+1}-\tau_2)\\ \qquad\qquad G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\Big] \\ k-1 \geqslant 1 \\ k+1 \leqslant i \\ k+2 \leqslant i \end{array}\right.$$

Le coefficient en facteur de cette expression fait intervenir la $i^{ème}$ puissance de $G(o)$, 2^{i+1} qui représente le nombre de permutations qu'on peut opérer sur les deux termes des $(i+1)$ couples de variables $\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\ldots\ \mu_i,\mu_i$, sans changer l'ordre de succession des indices des variables μ, et $i!$ qui est le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les i variables $\mu_1,\ldots\mu_i$, $(2+2i)!$ provenant de la symétrisation du noyau h_{2+2i} (cf. § IV.1).

On calcule alors le terme courant de l'expression [IV.3.1] soit :

$$[IV.3.4]\quad [1.3.5\ldots(2i-1)]\,C_{2+2i}^{2i}\,A^i\int_o^\infty\ldots\int_o^\infty h_{2+2i}(\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)\,d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

dans lequel on exprime le noyau h_{2+2i} selon son expression [IV.3.3] de telle sorte que ce terme courant se développe en une somme de $(2i+1)$ intégrales. Cette somme est multipliée par le coefficient :

$$[IV.3.5]\quad [1.3.5\ldots(2i-1)]\,C_{2+2i}^{2i}\,A^i\,\frac{2^{i+1}\cdot i!}{(2+2i)!}\,G(o)^i = [1.3.5\ldots(2i-1)]\,\frac{(2+2i)!}{2.2i!}\,\frac{2^{i+1}\cdot i!}{(2+2i)!}\,A^iG(o)^i = A^iG(o)^i$$

Les calculs effectués en Annexe VII-b montrent que cette somme d'intégrales a pour expression :

$$[IV.3.6]\quad G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\int_o^\infty G(\lambda)^{*(i)}\,d\lambda + \sum_{k=1}^{i}\Big[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} + G(\tau_1)^{*(k+1)}G(\tau_2-\tau_1)\Big]\int_o^\infty G(\lambda)^{*(i-k)}\,d\lambda$$

d'où l'expression du noyau $k_2(\tau_1,\tau_2)$:

$$[IV.3.7] \quad k_2(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) + \sum_{i=1}^{\infty} A^i\, G(o)^i \left[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i)}\, d\lambda + \sum_{k=1}^{i} \left[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} + G(\tau_1)^{*(k+1)} G(\tau_2-\tau_1) \right] \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)}\, d\lambda \right]$$

D'autre part, on peut simplifier l'écriture de ce noyau en faisant apparaître la série $S(\lambda)$ définie par la relation :

$$[IV.3.8] \quad S(\lambda) = \sum_{j=o}^{\infty} A^j\, G(o)^j\, G(\lambda)^{*(j)}$$

L'expression simplifiée du noyau de Wiener du second ordre est calculée en Annexe VII-c :

$$k_2(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_1)\, G(\tau_2-\tau_1) * [\delta(\tau_1) + \delta(\tau_2-\tau_1) - \delta(\tau_2-\tau_1)] \int_o^{\infty} S(\lambda)\, d\lambda$$

IV.4. - EXISTENCE DES NOYAUX DE WIENER DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

Les expressions [IV.2.9] et [IV.3.9] des noyaux du premier et second ordre comportent toutes deux le facteur commun $\int_o^{\infty} S(\lambda)\, d\lambda$ dans lequel :

$$[IV.4.1] \quad S(\lambda) = \sum_{j=o}^{\infty} A^j\, G(o)^j\, G(\lambda)^{*(j)}$$

Pour que ces noyaux soient définis, il est nécessaire que, non seulement, la série $S(\lambda)$ soit convergente, mais encore qu'elle soit sommable sur le domaine $[0,\infty]$. Pour que la série $S(\lambda)$ soit sommable sur ce domaine, il est nécessaire que chacun de ses termes le soit, ce qui suppose donc que la fonction $G(\lambda)^{*(j)}$ soit sommable sur ce domaine quel que soit j. Pour que le produit de convolution $G(\lambda)^{*(j)}$ soit sommable sur le domaine $[0,\infty]$, il faut que la fonction $G(\lambda)$ le soit aussi. Or, la fonction $G(\lambda)$ n'étant pas une fonction tempérée [cf.III-3], il s'ensuit que cette fonction n'est pas sommable sur le domaine $[0,\infty]$, ce qui implique donc que la série $S(\lambda)$ n'est pas sommable.

En conclusion, les noyaux de Wiener du premier et second ordre des équations de la cinétique n'ont pas d'existence réelle. Cette conclusion n'est pas très surprenante. En effet, Wiener avait prévu le développement en série de fonctionnelles G_n orthogonales entre elles lorsque ces fonctionnelles dépendaient de noyaux k_n appartenant à l'espace L^2 des fonctions de carré sommable cf. I-2 et [2]. Or, la relation qui lie les noyaux de Wiener aux noyaux de Volterra [cf.I.3.5] :

$$[IV.4.2] \quad k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) + \sum_{i=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2i-1)] C_{n+2i}^{2i}\, A^i \int_o^{\infty} \ldots \int_o^{\infty} h_{n+2i}(\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i$$

montre clairement que, pour que les noyaux de Wiener soient des fonctions de carré sommable, il est nécessaire que les noyaux de Volterra le soient aussi, ce qui n'est pas le cas des noyaux de Volterra des équations de la cinétique. En effet, ceux-ci sont exprimés par la relation :

$$[IV.4.3] \qquad h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = G(\tau_1)\, G(\tau_2-\tau_1) \ldots G(\tau_n-\tau_{n-1})$$

$G(\tau)$ étant une fonction essentiellement positive (cf. III-3] n'est pas une fonction de carré sommable et par suite les noyaux h_n non plus.

IV.5. - INTERPRETATION PHYSIQUE DE L'INEXISTENCE DES NOYAUX DE WIENER DU PREMIER ET SECOND ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

Au paragraphe précédent, nous avons montré que les noyaux de Wiener du premier et second ordre n'avaient pas d'existence réelle. D'après II-2, cela signifie que les fonctions d'intercorrélation puissance-réactivité du premier et second ordre ne sont pas définies lorsque le signal de réactivité est un bruit blanc gaussien. Nous allons montrer que cela entraîne nécessairement que la valeur moyenne des variations relatives de la puissance n'est pas définie non plus dans ce cas.

En effet, si on note :

$y(t) = \frac{\Delta n}{n_o}(t)$: variations relatives de la puissance

$x(t) = \Delta k(t)$: signal de réactivité

d'après [III.2.1] ces variations relatives ont pour expression :

$$[IV.5.1] \qquad \begin{cases} y(t) = \displaystyle\int_o^\infty G(\tau)x(t-\tau)\, d\tau + \int_o^\infty G(\tau)y(t-\tau)x(t-\tau)\, d\tau \\ G(t) = g(t)u(t) \end{cases}$$

On calcule la valeur moyenne de ces variations

$$[IV.5.2] \qquad \overline{y} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T}\int_o^T y(t)\, dt\right]$$

soit en exprimant $y(t)$ selon [IV.5.1] et en inversant l'ordre des intégrations :

$$[IV.5.3] \qquad \overline{y} = \int_o^\infty G(\tau)\, \overline{x}\, d\tau + \int_o^\infty G(\tau)\, \overline{yx}\, d\tau$$

Dans cette expression :

$$[IV.5.4] \qquad \overline{yx} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T}\int_o^T y(t)x(t)\, dt\right] = \Phi_{yx}(o)$$

où $\Phi_{yx}(o)$ est la valeur de $\Phi_{yx}(\sigma)$, fonction d'intercorrélation du premier ordre entre y(t) et x(t), pour $\sigma = 0$.

Comme x(t) est un bruit blanc gaussien, d'après [III.1.8] :

[IV.5.5] $$\Phi_{yx}(o) = A\, k_1(o)$$

où $k_1(o)$ est la valeur de $k_1(\sigma)$, noyau de Wiener du premier ordre, pour $\sigma=0$.

D'autre part, x(t) étant un bruit blanc gaussien, sa valeur moyenne est nulle :

[IV.5.6] $$\bar{x} = 0$$

Il s'ensuit que l'expression [IV.5.3] devient :

[IV.5.7] $$\bar{y} = A\, k_1(o) \int_o^\infty G(\tau)\, d\tau$$

Comme, pour les équations de la cinétique, $k_1(o)$ n'est pas défini, $\bar{y}$ ne l'est pas non plus.

D'autre part, on peut montrer, que la valeur moyenne de la puissance relative dépend du facteur : $\int_o^\infty [S(\lambda)\, d\lambda]$, tout comme $k_1(\sigma)$ et $k_2(\sigma_1, \sigma_2)$. La puissance relative est :

[IV.5.8] $$\frac{n}{n_o} = \frac{n_o + \Delta n}{n_o} = 1 + \frac{\Delta n}{n_o}$$

Sa valeur moyenne est donc :

[IV.5.9] $$\frac{\bar{n}}{n_o} = 1 + \frac{\overline{\Delta n}}{n_o}$$

En Annexe VIII, nous avons calculé la valeur moyenne des variations relatives de puissance, celles-ci étant exprimées sous la forme du développement de Volterra [III.2.10]. Ces calculs montrent que la puissance relative a pour valeur moyenne:

[IV.5.10] $$\frac{\bar{n}}{n_o} = \int_o^\infty S(\lambda)\, d\lambda$$

expression qui est identique à celle du facteur commun aux noyaux $k_1(\sigma)$ et $k_2(\sigma_1, \sigma_2)$. Comme nous avons montré au paragraphe [IV.4] que ce facteur n'était pas défini du fait que la série $S(\lambda)$ n'est pas sommable, $G(\lambda)$ n'étant pas une fonction tempérée, il s'ensuit que :

[IV.5.11] $$\lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{\bar{n}}{n_o}\right] \to \infty$$

On conlut donc que lorsque le signal de réactivité est un bruit blanc gaussien, la puissance a une valeur moyenne divergente, ce qui implique l'impossibilité de mesurer les fonctions d'intercorrélation puissance-réactivité et par suite les noyaux de Wiener. Comme, par ailleurs, les noyaux de Wiener des équations de la cinétique n'ont pas d'existence réelle, ces équations ne peuvent être caractérisées que par les noyaux de Volterra.

La mesure de ces noyaux au moyen d'une méthode statistique suppose que le signal de réactivité utilisé ait les propriétés statistiques d'un bruit blanc gaussien et que la puissance ait une valeur moyenne constante.

CHAPITRE V : PRINCIPE D'UNE METHODE DE MESURE DES NOYAUX DE VOLTERRA DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

V.1. - DEFINITION DU SIGNAL UTILISE

Comme nous l'avons conclu au chapitre IV, le signal de réactivité doit être tel que la valeur moyenne de la puissance soit constante. On peut espérer obtenir un signal de réactivité convenable en additionnant un bruit blanc gaussien et un échelon négatif, ce dernier étant destiné à compenser les effets divergents du bruit blanc sur la puissance. Soit $\Delta k(t)$ ce signal de réactivité :

[V.1.1] $\Delta k(t) = x(t) - Bu(t)$

— $x(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A

— $u(t)$ est la fonction échelon unitaire ou fonction de Heaviside

— B est une constante.

On recherche alors la valeur de la constante B qui permet d'obtenir une valeur moyenne constante de la puissance, c'est-à-dire une valeur moyenne nulle pour les variations relatives de la puissance $\frac{\Delta n}{n_o}(t)$ qu'on note $y(t)$. Avec cette notation, et d'après [III.1.11], la solution intégrale des équations de la cinétique s'écrit :

[V.1.2] $$y(t) = \int_o^\infty G(\tau)\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau + \int_o^\infty G(\tau)\, y(t-\tau)\, \Delta k(t-\tau)\, d\tau$$

où : $G(t) = g(t)u(t)$

La valeur moyenne des variations relatives de puissance est donc :

[V.1.3] $$\overline{y} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_o^T \left[\int_o^\infty G(\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau + \int_o^\infty G(\tau)y(t-\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau \right] dt \right]$$

qu'on peut écrire en inversant l'ordre des intégrations :

[V.1.4] $$\overline{y} = \int_o^\infty G(\tau)\, \overline{\Delta k}\, d\tau + \int_o^\infty G(\tau)\, \overline{y\Delta k}\, d\tau$$

Pour calculer les valeurs moyennes de $\Delta k(t)$ et de $y(t)\Delta k(t)$, on exprime $\Delta k(t)$ selon [V.1.1] :

$$[V.1.5] \quad \begin{cases} \overline{\Delta k} = \overline{x} - B\overline{u} \\ \overline{y\Delta k} = \overline{yx} - B\overline{yu} \end{cases}$$

x(t) étant un bruit blanc gaussien, sa valeur moyenne est nulle :

$$[V.1.6] \quad \overline{x} = 0$$

u(t) étant la fonction de Heaviside, sa valeur moyenne est 1 et la valeur moyenne de y(t)u(t) est la même que celle de y(t) car y(t) = 0 pour t < 0

$$[V.1.7] \quad \begin{cases} \overline{u} = 1 \\ \overline{yu} = \overline{y} \end{cases}$$

La valeur moyenne de y(t)x(t) s'exprime en fonction de la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre y(t) et x(t). En effet :

$$[V.1.8] \quad \begin{cases} \overline{yx} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^\infty y(t)x(t)\, dt \right] = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^\infty y(t)x(t-\sigma)\, dt \right]_{\sigma=0} \\ \quad = \Phi_{yx}^{(1)}(o) \end{cases}$$

Par suite :

$$[V.1.9] \quad \begin{cases} \overline{\Delta k} = -B \\ \overline{y\Delta k} = \Phi_{yx}^{(1)}(o) - B\overline{y} \end{cases}$$

et l'expression [V.1.4] s'écrit alors :

$$[V.1.10] \quad \overline{y} = [- B + \Phi_{yx}^{(1)}(o) - B\overline{y}] \int_0^\infty G(\tau)\, d\tau$$

Comme on cherche la valeur de B telle que la valeur moyenne de y(t) soit nulle, on pose $\overline{y} = 0$ et on obtient :

$$[V.1.11] \quad B = \Phi_{yx}^{(1)}(o)$$

On conclut donc que le signal de réactivité $\Delta k(t)$ envisagé est convenable pourvu qu'on donne à la constante B la valeur $\Phi_{yx}^{(1)}(o)$.

V.2. - CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU PREMIER ORDRE ENTRE LES VARIATIONS RELATIVES DE PUISSANCE ET LE BRUIT BLANC GAUSSIEN

Les variations relatives de puissance sont définies par l'équation intégrale :

$$[V.2.1] \quad y(t) = \int_0^\infty G(\tau)\Delta k(t-\tau)\, d\tau + \int_0^\infty G(\tau)y(t-\tau)\Delta k(t-\tau)\, d\tau$$

On considère que le signal de réactivité $\Delta k(t)$ est tel que la valeur moyenne de $y(t)$ est nulle.

$$[V.2.2] \quad \begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - Bu(t) \\ B = \Phi_{yx}^{(1)}(o) \end{cases}$$

La fonction d'intercorrélation du premier ordre entre $y(t)$ et $x(t)$ est définie par la relation :

$$[V.2.3] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t-\sigma)\, dt \right] = \overline{y(t)x(t-\sigma)}$$

En exprimant $y(t)$ selon [V.2.1] et en inversant l'ordre des sommations, on obtient :

$$[V.2.4] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \int_0^\infty G(\tau)\overline{\Delta k(t-\tau)x(t-\sigma)}\, d\tau + \int_0^\infty G(\tau)\overline{y(t-\tau)\Delta k(t-\tau)x(t-\sigma)}\, d\tau$$

On effectue alors le changement de variable sur t : $t-\tau = \lambda$

$$[V.2.5] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \int_0^\infty G(\tau)\overline{\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)}\, d\tau + \int_0^\infty G(\tau)\overline{y(\lambda)\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)}\, d\tau$$

Pour calculer les valeurs moyennes, on exprime $\Delta k(\lambda)$ selon [V.2.2]. D'où :

$$[V.2.6] \quad \overline{\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \overline{x(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} - B\ \overline{u(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)}$$

Comme $x(t)$ est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A :

$$[V.2.7] \quad \overline{x(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \Phi_{xx}^{(1)}(\sigma-\tau) = A\ \delta(\sigma-\tau)$$

De même, le fait de le multiplier par une fonction de Heaviside ne change pas les propriétés statistiques du bruit blanc :

$$[V.2.8] \quad \overline{u(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \overline{x(\lambda+\tau-\sigma)} = 0$$

Donc :

$$[V.2.9] \quad \overline{\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = A\ \delta(\sigma-\tau)$$

D'autre part :

$$[V.2.10] \quad \overline{y(\lambda)\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \overline{y(\lambda)x(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} - B\,\overline{y(\lambda)u(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)}$$

Cette relation fait apparaître les fonctions d'intercorrélation du premier et second ordre entre y(t) et x(t) :

$$[V.2.11] \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{y(\lambda)x(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \lim_{T\to\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T y(\lambda)x(\lambda-\sigma_1)x(\lambda+\tau-\sigma)\, d\lambda \right]_{\sigma_1=0} \\ \qquad\qquad = \Phi^{(2)}_{yx}(o,\sigma-\tau) \end{array} \right.$$

Comme $y(\lambda)$ est nul pour $\lambda < 0$:

$$[V.2.12] \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{y(\lambda)u(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \overline{y(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} \\ \qquad\qquad = \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma-\tau) \end{array} \right.$$

Par suite :

$$[V.2.13] \quad \overline{y(\lambda)\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \Phi^{(2)}_{yx}(o,\sigma-\tau) - B\,\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma-\tau)$$

La fonction d'intercorrélation du premier ordre a donc pour expression :

$$[V.2.14] \quad \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) = A \int_o^\infty G(\tau)\delta(\sigma-\tau)\, d\tau + \int_o^\infty G(\tau) \left[\Phi^{(2)}_{yx}(o,\sigma-\tau) - B\,\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma-\tau) \right] d\tau$$

soit :

$$[V.2.15] \quad \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) = A\,G(\sigma) + \int_o^\infty G(\tau) \left[\Phi^{(2)}_{yx}(o,\sigma-\tau) - B\,\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma-\tau) \right] d\tau$$

De cette expression, on peut conclure que $\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma)$ est proportionnel au noyau du premier ordre à condition que :

$$[V.2.16] \quad \Phi^{(2)}_{yx}(o,\sigma-\tau) - B\,\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma-\tau) = 0$$

Dans ce cas :

$$[V.2.17] \quad \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) = A\,G(\sigma)$$

Par suite :

$$[V.2.18] \quad B = \Phi^{(1)}_{yx}(o) = A\,G(o)$$

et la condition [V.2.16] s'écrit alors :

$$[V.2.19] \quad \Phi^{(2)}_{yx}(o,\sigma-\tau) = A^2\,G(o)\,G(\sigma-\tau)$$

Pourvu que cette condition soit réalisée, le noyau de Volterra du premier ordre des équations de la cinétique se déduit de la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre y(t) et x(t) au moyen de la relation :

$$[V.2.20] \quad G(\sigma) = \frac{\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma)}{A}$$

V.3. - CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU SECOND ORDRE ENTRE LES VARIATIONS RELATIVES DE LA PUISSANCE ET LE BRUIT BLANC GAUSSIEN

Tout d'abord, on met l'expression [V.2.1] des variations relatives de puissance sous une forme qui fait apparaître le noyau de Volterra du second ordre. Pour cela, dans le second membre de cette expression, on remplace $y(t-\tau)$ par son expression intégrale [V.2.1] :

$$[V.3.1] \quad y(t-\tau) = \int_0^\infty G(\lambda)\Delta k(t-\tau-\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty G(\lambda)y(t-\tau-\lambda)\Delta k(t-\tau-\lambda)\, d\lambda$$

Par suite y(t) s'écrit :

$$[V.3.2] \quad y(t) = \int_0^\infty G(\tau)\Delta k(t-\tau)\, d\tau + \int_0^\infty G(\tau)\Delta k(t-\tau)\, d\tau \int_0^\infty G(\lambda)\Delta k(t-\tau-\lambda)\, d\lambda + \int_0^\infty G(\tau)\Delta k(t-\tau)\, d\tau \int_0^\infty G(\lambda)y(t-\tau-\lambda)\Delta k(t-\tau-\lambda)\, d\lambda$$

On effectue alors les changements de variables : $\tau = \tau_1$ et $\tau+\lambda = \tau_2$, et on obtient [cf. § III.2] :

$$[V.3.3] \quad y(t) = \int_0^\infty G(\tau)\Delta k(t-\tau)\, d\tau + \int_0^\infty \int_0^\infty G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\Delta k(t-\tau_1)\Delta k(t-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 + \int_0^\infty \int_0^\infty G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)y(t-\tau_2)\Delta k(t-\tau_1)\Delta k(t-\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2$$

Les variations relatives de la puissance sont alors exprimées par la somme d'un développement de Volterra limité à l'ordre 2 et d'un reste.

La fonction d'intercorrélation du second ordre entre y(t) et x(t) est définie par :

$$[V.3.4] \quad \Phi^{(2)}_{yx}(\sigma_1, \sigma_2) = \overline{y(t)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)}$$

On remplace y(t) par son expression [V.3.3] et on suppose que $\Delta k(t)$ est tel que la valeur moyenne de y(t) soit nulle, c'est-à-dire que $\Delta k(t)$ a pour expression :

$$[V.3.5] \quad \begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - B\, u(t) \\ B = A\, G(o) \end{cases}$$

Les calculs effectués en Annexe IX montrent que $\Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)$ est proportionnelle au noyau de Volterra du second ordre exprimé sous une forme symétrique :

$$[V.3.6] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2) = 2!\ A^2\ h_2(\sigma_1, \sigma_2)$$

à la condition que les retards σ_1 et σ_2 soient différents, et que les égalités suivantes soient satisfaites :

$$[V.3.7] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(4)}(o, \tau_1-\tau_2, \sigma_1-\tau_2, \sigma_2-\tau_2) = A\ G(o)\ \Phi_{yx}^{(3)}(\tau_1-\tau_2, \sigma_1-\tau_2, \sigma_2-\tau_2) \\ \Phi_{yx}^{(3)}(o, \sigma_1-\tau_2, \sigma_2-\tau_2) = 2!\ A^3\ G(o)\ h_2(\sigma_1-\tau_2, \sigma_2-\tau_2) \end{cases}$$

Pourvu que ces conditions soient satisfaites, le noyau de Volterra du second ordre des équations de la cinétique se déduit de la fonction d'intercorrélation entre y(t) et x(t) :

$$[V.3.8] \quad h_2(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{\Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)}{2!\ A^2}$$

De ce fait, la condition [V.2.19] est pleinement satisfaite. En effet :

$$[V.3.9] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2) = A^2 \left[G(\sigma_1)G(\sigma_2-\sigma_1) + G(\sigma_2)G(\sigma_1-\sigma_2) \right]$$

Si on attribue à l'une quelconque des variables σ_1, σ_2, la valeur O :

$$[V.3.10] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(o, \mu) = A^2\ [G(o)\ G(\mu)]$$

On remplace μ par la valeur $(\sigma-\tau)$ et on obtient l'égalité [V.2.19] :

$$[V.3.11] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(o, \sigma-\tau) = A^2\ G(o)\ G(\sigma-\tau)$$

En conclusion, si $\Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1, \sigma_2)$ est proportionnelle au noyau du second ordre, nécessairement $\Phi_{yx}^{(1)}$ est proportionnelle au noyau du premier ordre.

V.4. - GENERALISATION AU CALCUL DES FONCTIONS D'INTERCORRELATION D'ORDRE QUELCONQUE ENTRE LES VARIATIONS RELATIVES DE PUISSANCE ET LE BRUIT BLANC GAUSSIEN

On suppose que la fonction d'intercorrélation d'ordre n, quelconque, est proportionnelle au noyau de Volterra d'ordre n, et on cherche les conditions à satisfaire. Pour cela, on exprime les variations relatives de puissance par la somme d'un développement de Volterra limité à l'ordre n et d'un reste. En généralisant le calcul effectué au paragraphe [V.3] on obtient :

$$[V.4.1] \quad \begin{cases} y(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty h_i(\tau_1, \ldots, \tau_i)\ \Delta k(t-\tau_1) \ \ldots\ \Delta k(t-\tau_i)\ d\tau_1 \ \ldots\ d\tau_i \\ \qquad + \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty h_n(\tau_1, \ldots, \tau_n) y(t-\tau_n) \Delta k(t-\tau_1) \ldots \Delta k(t-\tau_n)\ d\tau_1 \ \ldots d\tau_n \end{cases}$$

La fonction d'intercorrélation d'ordre n entre y(t) et x(t) est définie par la relation :

$$[V.4.2] \qquad \Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = y(t)x(t-\sigma_1)\ \ldots\ x(t-\sigma_n)$$

Dans cette expression, on remplace y(t) par son expression [V.4.1] et on inverse l'ordre des intégrations :

$$[V.4.3] \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_i(\tau_1,\ldots,\tau_i)\,\overline{\Delta k(t-\tau_1)\ldots\Delta k(t-\tau_i)x(t-\sigma_1)\ldots x(t-\sigma_n)}\\ d\tau_1\ \ldots\ d\tau_i \\ + \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,\overline{y(t-\tau_n)\Delta k(t-\tau_1)\ldots\Delta k(t-\tau_n)x(t-\sigma_1)\ldots x(t-\sigma_n)}\\ d\tau_1\ \ldots\ d\tau_n \end{aligned} \right.$$

On effectue alors les changements de variables sur t : $t-\tau_i = \lambda_i$, et on obtient:

$$[V.4.4] \qquad \left\{ \begin{aligned} \Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_i(\tau_1,\ldots\tau_i)\,\frac{\overline{\Delta k(\lambda_i+\tau_i-\tau_1)\ldots\Delta k(\lambda_i+\tau_i-\tau_{i-1})\Delta k(\lambda_i)}}{\overline{x(\lambda_i+\tau_i-\sigma_1)\ldots x(\lambda_i+\tau_i-\sigma_n)}}\,d\tau_1\ldots d\tau_i \\ + \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,\frac{\overline{y(\lambda_n)\Delta k(\lambda_n+\tau_n-\tau_1)\ldots\Delta k(\lambda_n+\tau_n-\tau_{n-1})\Delta k(\lambda_n)}}{\overline{x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_1)\ldots x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_n)}}\,d\tau_1\ldots d\tau_n \end{aligned} \right.$$

On exprime $\Delta k(t)$ selon [V.3.5] :

$$[V.4.5] \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta k(t) &= x(t) - B\,u(t) \\ B &= A\,G(o) \end{aligned} \right.$$

et on calcule les valeurs moyennes en les exprimant au moyen des fonctions d'autocorrélation de x(t) et d'intercorrélation entre y(t) et x(t), et en tenant compte du fait que la multiplication par une fonction de Heaviside ne modifie pas les propriétés statistiques de x(t). Les calculs effectués en Annexe X montrent que la fonction d'intercorrélation d'ordre n est proportionnelle au noyau de Volterra d'ordre n :

$$[V.4.6] \qquad \Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = n!\ A^n\ h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$$

à condition que les retards σ soient différents entre eux, que l'expression du noyau h_n soit symétrique, et que les n conditions suivantes soient satisfaites :

$$[V.4.7] \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Phi_{yx}^{(2n-m)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1}) = A\,G(o)\ \Phi_{yx}^{(2n-m-1)}(\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1}) \\ &\text{pour toutes les valeurs de m telles que } 0 \leqslant m \leqslant n-1 \end{aligned} \right.$$

On suppose alors que ces conditions sont réalisées, et on calcule la fonction d'intercorrélation d'ordre (n+1) entre y(t) et x(t). L'expression de cette fonction est :

[V.4.8] $\Phi_{yx}^{(n+1)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1}) = (n+1)!\ A^{(n+1)}\ h_{n+1}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$

à condition que les retards σ_2 soient différents entre eux, que l'expression du noyau h_{n+1} soit symétrique, et que les conditions suivantes soient satisfaites :

[V.4.9] $\left\{ \Phi_{yx}^{(2n-m+2)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m+1}) = A\ G(o)\ \Phi_{yx}^{(2n-m+1)}(\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m+1}) \right.$

$\left.\right.$ pour toutes les valeurs de m telles que $0 \leqslant m \leqslant n$

Les conditions [V.4.7] ayant été supposées satisfaites, d'une part, $\Phi_{yx}^{(n+1)}$ est nécessairement liée à $\Phi_{yx}^{(n)}$ par la relation :

[V.4.10] $\Phi_{yx}^{(n+1)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_n) = A\ G(o)\ \Phi_{yx}^{(n)}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$

obtenue en écrivant l'égalité [V.4.7] pour m = n-1. D'autre part, $\Phi_{yx}^{(n)}$ est exprimée par la relation [V.4.6], de telle sorte que la relation [V.4.10] s'écrit:

[V.4.11] $\Phi_{yx}^{(n+1)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_n) = n!\ A^{(n+1)}\ G(o)\ h_n(\mu_1,\ldots,\mu_n)$

Le noyau h_n, étant exprimé symétriquement, est lié au noyau h_{n+1} pour la relation :

[V.4.12] $h_n(\mu_1,\ldots,\mu_n) = \frac{(n+1)!}{n!\ G(o)}\ h_{n+1}(o,\mu_1,\ldots,\mu_n)$

(cf. Annexe XI)

Par suite, la relation [V.4.11] s'écrit :

[V.4.13] $\Phi_{yx}^{(n+1)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_n) = (n+1)!\ A^{(n+1)}\ h_{n+1}(O,\mu_1,\ldots,\mu_n)$

et est donc nécessairement satisfaite si $\Phi_{yx}^{(n+1)}$ est exprimée par la relation [V.4.8].

En conclusion, si la fonction d'intercorrélation, d'ordre n quelconque, est exprimée par la relation :

[V.4.14] $\Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = n!\ A^n\ h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$

nécessairement, la fonction d'intercorrélation d'ordre (n+1), est exprimée par la relation :

[V.4.15] $\Phi_{yx}^{(n+1)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1}) = (n+1)!\ A^{(n+1)}\ h_{n+1}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1})$

et, par suite, la relation [V.4.14] est vérifiée pour toute valeur de n, à condition que les retards σ soient différents entre eux, et que le signal de réactivité soit défini par la relation [V.4.5] soit :

[V.4.16] $\Delta k(t) = x(t) - A\ G(o)u(t)$

On peut alors expliciter ce signal en fonction des paramètres des équations de la cinétique. Pour cela, il faut calculer G(o), c'est-à-dire appliquer le théo-

rème de la valeur initiale sur la transformée de Laplace de $G(\tau)$:

$$[V.4.17] \quad G(o) = \lim_{p \to \infty} [p\, G(p)]$$

Comme G(p) a pour expression (cf. [III.1.10]) :

$$[V.4.18] \quad G(p) = \frac{1}{p\left[\Lambda + \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j}{p+\lambda_j}\right]}$$

on obtient :

$$[V.4.19] \quad G(o) = \frac{1}{\Lambda}$$

D'où l'expression finale du signal de réactivité :

$$[V.4.20] \quad \Delta k(t) = x(t) - \frac{A}{\Lambda} u(t)$$

CONCLUSION

Dans le cas d'un réacteur à basse puissance, les variations relatives de la puissance, $\frac{\Delta n}{n_o}(t)$, sont liées aux variations de la réactivité, $\Delta k(t)$, par les équations de la cinétique. La solution intégrale de ces équations peut se mettre sous la forme d'un développement de Volterra :

$$y(t) = \frac{\Delta n}{n_o}(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_o^{\infty} \dots \int_o^{\infty} h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) \Delta k(t-\tau_1) \dots \Delta k(t-\tau_i)\, d\tau_1 \dots d\tau_i$$

Dans ce développement, les noyaux d'ordre i quelconque ont pour expression générale :

$$h_i(\tau_1, \dots, \tau_i) = G(\tau_1)\, G(\tau_2-\tau_1) \dots G(\tau_i-\tau_{i-1})$$

où la fonction G(t), qui exprime le noyau du premier ordre, est définie par la relation:

$$G(t) = g(t)u(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p\left[\Lambda + \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j}{p+\lambda_j}\right]}\right]$$

Les noyaux de Volterra des équations de la cinétique ne sont donc pas des fonctions sommables dans le domaine $[0,\infty]$, de telle sorte que les noyaux de Wiener des équations de la cinétique n'ont pas d'existence réelle. Par suite, la mesure de ces noyaux n'est pas possible. L'impossibilité de cette mesure est physiquement liée au fait que la puissance est divergente lorsque le signal de réactivité est un bruit blanc gaussien. Il s'ensuit que toute méthode statistique de mesure doit utiliser un signal de réactivité tel que les variations de la puissance créent une valeur moyenne nulle. Or, l'effet divergent du bruit blanc sur la puissance peut être compensé en ajoutant à ce bruit blanc un échelon négatif d'amplitude appropriée. Les calculs montrent que cette amplitude est égale au rapport de la densité spectrale A du bruit blanc et du temps de vie moyen Λ des neutrons. Un tel signal de réactivité est exprimé par la relation :

$$\begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - \frac{A}{\Lambda}\, u(t) \\ x(t) \ : \text{ bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \\ u(t) \ : \text{ fonction de Heaviside en fonction échelon unitaire} \end{cases}$$

D'autre part, ce signal de réactivité engendre des variations relatives de puissance, $y(t) = \frac{\Delta n}{n_o}(t)$, dont la fonction d'intercorrélation, d'ordre n quelconque, relative au bruit blanc x(t), est proportionnelle à l'expression symétrique du noyau de Volterra d'ordre n :

$$\Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = n!\ A^n\ h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$$

Il est donc possible de mesurer séparément tous les noyaux de Volterra d'un réacteur à basse puissance, si le temps de vie moyen Λ des neutrons est connu. La méthode consiste à exciter le réacteur au moyen du signal de réactivité défini ci-dessus, et à calculer les valeurs de la fonction d'intercorrélation, d'ordre n, entre les variations relatives de la puissance et le bruit blanc gaussien. Les valeurs correspondantes du noyau d'ordre n sont obtenues par application de la relation :

$$h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \frac{1}{n!\ A^n}\ \Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n).$$

TROISIEME PARTIE

APPLICATION A LA MESURE PHYSIQUE DES NOYAUX DE VOLTERRA DU PREMIER ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

INTRODUCTION

Comme LEE et SCHETZEN [4] nous aurions pu utiliser un bruit blanc gaussien pour vérifier notre théorie. En effet, une méthode de neutrons pulsés permet d'obtenir un tel signal de réactivité. Mais cette méthode étant inapplicable au réacteur CABRI, le signal de réactivité ne pouvait être produit que par des moyens mécaniques tels qu'une barre de contrôle ou un modulateur de réactivité spécialement conçus à cet effet [5]. Cependant, de tels dispositifs ont une bande passante réduite (quelques hertzs) et, par suite, le signal de réactivité obtenu n'a pas les propriétés statistiques d'un bruit blanc gaussien, ce dernier ayant été filtré. Par ailleurs, l'utilisation d'un bruit blanc gaussien présente un autre inconvénient. En effet, les propriétés statistiques d'un tel signal sont définies sur un intervalle de temps infini, et, par suite, les fonctions d'intercorrélation doivent être mesurées sur un intervalle de temps infini, ce qui, expérimentalement, est impossible.

Bien que LEE et SCHETZEN aient montré que ces mesures pouvaient s'effectuer avec une bonne précision pourvu que l'intervalle de temps soit choisi suffisamment long, nous avons préféré utiliser des signaux pseudo-aléatoires à cause de leurs nombreux avantages. En effet, les propriétés statistiques de ces signaux sont proches de celles du bruit blanc gaussien, et sont définies sur un intervalle de temps de longueur finie. Par ailleurs, la génération de ces signaux est aisée, et l'utilisateur est maître de leurs propriétés statistiques. Bien que les signaux pseudo-aléatoires binaires (à deux niveaux) soient le plus couramment utilisés, pour notre part, nous avons employé les signaux pseudo-aléatoires ternaires (à trois niveaux) mis au point par R. HOOPER parce que ceux-ci sont mieux adaptés à la mesure des noyaux des systèmes non-linéaires que les signaux binaires [6].

En premier lieu, au chapitre VI, nous résumons l'essentiel des travaux de R. HOOPER sur la génération des signaux pseudo-aléatoires ternaires, les fonctions d'autocorrélation de ces signaux, et leur utilisation pour la mesure des noyaux du premier et second ordre d'une classe de systèmes non-linéaires.

Ensuite, au chapitre VII, nous justifions, d'un point de vue théorique, les résultats obtenus par R. HOOPER en ce qui concerne l'utilisation de ces signaux pour la

mesure du noyau des systèmes linéaires. Cependant, du fait qu'il n'est pas possible de définir analytiquement toutes les propriétés statistiques de ces signaux, et, par suite, de prévoir théoriquement si ces signaux sont convenables pour mesurer les noyaux du premier ordre des équations de la cinétique, il était nécessaire de procéder à des expériences sur un réacteur. Les expériences effectuées sur le réacteur CABRI sont décrites au chapitre VIII et les résultats obtenus critiqués.

Ces résultats ne nous ont pas permis de conclure en raison de l'imprécision des expériences. C'est pourquoi, nous avons élaboré un programme numérique en vue de déterminer la cause de l'échec partiel des expériences, la cause de cet échec pouvant être attribuée à l'imprécision des dispositifs expérimentaux, mais aussi à la nature même des signaux pseudo-aléatoires ternaires. Le programme numérique utilisé pour mener à bien cette interprétation consiste principalement à calculer la réponse en puissance du réacteur CABRI à un signal de réactivité pseudo-aléatoire ternaire puis à calculer la fonction d'intercorrélation du premier ordre puissance-réactivité.

CHAPITRE VI : RESUME DES TRAVAUX DE R. HOOPER

VI.1. - GENERATION DES SIGNAUX PSEUDO-ALEATOIRES TERNAIRES

Ces signaux sont définis par les règles suivantes :

— à chaque instant le signal ne peut prendre que l'une des trois valeurs : +1, 0 ou -1;

— le signal ne peut changer de valeur qu'en des instants séparés par un intervalle de temps Δt;

— la valeur C_j du signal pendant le $j^{ième}$ intervalle est calculée au moyen de la formule de récurrence :

$$[VI.1.1] \qquad C_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \, C_{j-i} \qquad \text{(modulo 3)}$$

dans laquelle les coefficients a_i ont pour valeur +1, -1 ou 0, et sont choisis dans les tables élaborées par R. HOOPER. Par ailleurs, il est à noter que les m premières valeurs de C_j qui sont nécessaires pour le calcul de C_j peuvent être choisies arbitrairement pourvu qu'elles ne soient pas toutes égales à 0.

De tels signaux sont périodiques de période T telle que :

$$[VI.1.2] \qquad T = (3^m - 1)\,\Delta t$$

Par ailleurs, le signal prend 3^{m-1} fois la valeur +1, 3^{m-1} fois la valeur -1, et $(3^{m-1}-1)$ fois la valeur 0. Par suite, la valeur moyenne d'un signal pseudo-aléatoire ternaire est nulle sur une période.

La représentation graphique d'un signal pseudo-aléatoire caractérisé par les coefficients :

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

et par les valeurs initiales :

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

est donnée à la figure 1.

Au moyen d'un ordinateur, R. HOOPER a pu élaborer les tables donnant les valeurs à attribuer aux coefficients a_i pour des valeurs de m comprises entre 2 et 8. Du fait que ces signaux sont à trois niveaux, leur valeur C_j peut être définie au moyen de deux variables binaires, ce qui rend très aisé le calcul de cette valeur. Celui-ci peut s'effectuer au moyen de circuits logiques, soit plus simplement au moyen d'un ordinateur. Les valeurs ainsi calculées peuvent être décodées en temps réel ou bien à partir d'une bande perforée où sont mises en mémoire les valeurs successives et codées C_j. Ce décodage s'effectue simplement au moyen de deux relais ou d'un double commutateur électronique.

VI.2. - FONCTIONS D'AUTOCORRELATION DES SIGNAUX PSEUDO-ALEATOIRES TERNAIRES

Les signaux pseudo-aléatoires ternaires ont en commun avec les bruits blancs gaussiens (cf. § II.2) la propriété d'avoir toutes leurs fonctions d'intercorrélation d'ordre pair nulles partout. En particulier, comme nous l'avons fait remarquer au paragraphe précédent, la valeur moyenne de ces signaux, qu'on peut par extension appeler fonction d'autocorrélation d'ordre zéro, est nulle aussi. Cette propriété peut s'énoncer ainsi :

[VI.2.1]
$$\begin{cases} x(t) \text{ : signal pseudo-aléatoire ternaire} \\ \\ \Phi_{xx}^{(2k)}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{2k}) = 0 \qquad (k \text{ entier positif ou nul}) \end{cases}$$

Cette propriété distingue les signaux pseudo-aléatoires ternaires de leurs homologues binaires plus couramment utilisés. En effet, ces derniers ont des fonctions d'autocorrélation d'ordre pair de valeur négative, et comme l'avait conclu Hooper, ils ne peuvent donc pas être utilisés pour la mesure des caractéristiques dynamiques des systèmes non-linéaires.

En ce qui concerne la fonction d'autocorrélation du premier ordre, $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma)$, des signaux pseudo-aléatoires ternaires, R. Hooper a montré que celle-ci était une suite d'impulsions triangulaires alternativement positives et négatives. Ces impulsions sont caractérisées par :

— une amplitude qui dépend du nombre m des coefficients a_i et du carré de l'amplitude B du signal (celui-ci ayant trois niveaux B, 0 et -B);

— une largeur égale à $2\,\Delta t$;

— une répartition uniforme le long de l'axe des σ, l'alternance s'effectuant toutes les demi-périodes. Comme pour tous les signaux périodiques de période T, la fonction d'autocorrélation du premier ordre est une fonction périodique de période T. La représentation graphique de cette fonction est donnée à la figure 2 et son expression analytique est :

[VI.2.2] $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma) = K\left[\frac{1}{\Delta t}(\sigma - nT) + 1\right]$ pour $nT - \Delta t \leqslant \sigma \leqslant nT$

[VI.2.3] $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma) = K\left[-\frac{1}{\Delta t}(\sigma - nT) + 1\right]$ pour $nT \leqslant \sigma \leqslant nT+\Delta t$

[VI.2.4] $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma) = K\left[-\frac{1}{\Delta t}(\sigma - \frac{nT}{2}) - 1\right]$ pour $\frac{nT}{2} - \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \frac{nT}{2}$, $n \neq 0$

[VI.2.5] $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma) = K\left[+\frac{1}{\Delta t}(\sigma - \frac{nT}{2}) - 1\right]$ pour $\frac{nT}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{nT}{2} + \Delta t$, $n \neq 0$

[VI.2.6] $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma) = 0$ pour toute autre valeur de σ

Dans ces expressions n est un entier relatif quelconque et K une constante qui s'exprime en fonction du nombre m des coefficients, de l'incrément temporel Δt, et de l'amplitude B de la chaîne ternaire :

[VI.2.7] $$K = \frac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B^2 \Delta t$$

Par ailleurs, en ce qui concerne la fonction d'autocorrélation du $3^{ème}$ ordre, R. Hooper a montré que le comportement des signaux pseudo-aléatoires différait quelque peu de celui des fonctions périodiques dont les caractéristiques seraient analogues à celles des bruits blancs gaussiens. Pour de telles fonctions périodiques idéales, la fonction d'autocorrélation du 1^{er} ordre est nulle partout sauf pour $\sigma=0$ où cette fonction présente un pic, et la fonction d'autocorrélation du troisième ordre est nulle partout sauf à l'origine des axes de l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ et le long des diagonales des faces du cube de côté T, période de ces fonctions (cf. fig. 3). Le rapport des amplitudes de ces deux catégories de pics doit être tel que :

[VI.2.8] $$\frac{\Phi_{xx}^{(3)}(o,o,o)}{\Phi_{xx}^{(3)}(o,\sigma,\sigma)} = 3$$

Effectués pour des valeurs des arguments $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ qui sont des multiples de l'incrément temporel Δt, les calculs de R. Hooper montrent que la fonction d'autocorrélation du troisième ordre des signaux pseudo-aléatoires présente aussi des pics dans les régions de l'espace définies ci-dessus. L'amplitude de ces pics s'exprime en fonction des valeurs de la fonction d'autocorrélation du premier ordre $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma)$; à l'origine des axes, le pic a pour amplitude :

[VI.2.9] $$\begin{cases} \Phi_{xx}^{(3)}(o,o,o) = B^2 \ \Phi_{xx}^{(1)}(o) \\ \\ \Phi_{xx}^{(1)}(o) = \dfrac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B^2 \end{cases}$$

Le long des diagonales des faces du cube de côté T, les pics ont pour amplitude:

[VI.2.10] $$\begin{cases} \Phi_{xx}^{(3)}(o,k\Delta t,k\Delta t) = \frac{2}{3} \Phi_{xx}^{(3)}(o,o,o) = \frac{2}{3} B^2 \ \Phi_{xx}^{(1)}(o) \\ \\ k \neq 0 \text{ entier positif.} \end{cases}$$

La relation entrée-sortie de tels systèmes est donc un développement de Volterra limité à l'ordre deux, et le signal de sortie y(t) est considéré initialement nul. Par ailleurs, l'application directe de la relation [I.3.5] montre que, pour ces systèmes, les noyaux de Volterra et les noyaux de Wiener sont confondus :

$$[VI.3.2] \quad \begin{cases} k_1(\tau) = h_1(\tau) \\ \\ k_2(\tau_1,\tau_2) = h_2(\tau_1,\tau_2) \end{cases}$$

R. Hooper a montré que la mesure de ces noyaux pouvait s'effectuer au moyen d'une méthode d'intercorrélation identique à la méthode générale définie au chapitre II, mais l'entrée du système étant excitée par un signal pseudo-aléatoire ternaire.

En premier lieu, R. Hooper a calculé les fonctions d'intercorrélation du premier et second ordre en supposant que les signaux pseudo-aléatoires ternaires sont caractérisés, d'une part, par un incrément temporel Δt suffisamment petit pour que leurs fonctions d'autocorrélation du premier et second ordre puissent être exprimées au moyen de fonctions de Dirac, et d'autre part, pour une période T suffisamment longue pour que les valeurs des noyaux puissent être considérées nulles pour les valeurs des arguments supérieures à $\frac{T}{2} - \Delta t$, c'est-à-dire que la période T doit être égale à au moins deux fois le temps d'établissement du système; ces conditions sont exprimées par les relations :

$$[VI.3.3] \quad \begin{cases} \Phi_{xx}^{(1)}(\sigma) \simeq \dfrac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B^2 \, \Delta t \, \delta(\sigma) \\ \\ \Phi_{xx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) \simeq \dfrac{4 \times 3^{m-2}}{3^m - 1} B^3 \, \Delta t^2 \, [\delta(\sigma_1)\delta(\sigma_2-\sigma_3) + \delta(\sigma_2)\delta(\sigma_1-\sigma_3)+\delta(\sigma_3)\delta(\sigma_1-\sigma_2)] \\ \\ \sigma \leqslant \dfrac{T}{2} - \Delta t \end{cases}$$

$$[VI.3.4] \quad \begin{cases} h_1(\sigma) \simeq 0 \\ \\ h_2(\sigma_1,\sigma_2) \simeq 0 \end{cases} \quad \text{pour } \sigma > \frac{T}{2} - \Delta t$$

Avec ces approximations, les fonctions d'intercorrélation du premier et second ordre sont respectivement proportionnelles aux noyaux du premier et second ordre. Par suite, les noyaux se déduisent directement de la mesure des fonctions d'intercorrélation :

$$[VI.3.5] \quad h_1(\sigma) = \frac{3^m - 1}{2 \times 3^{m-1} B^2 \, \Delta t} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$$

$$[VI.3.6] \quad h_2(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{3^m - 1}{8 \times 3^{m-2} B^3 \, \Delta t^2} \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) \quad \text{pour les valeurs de } \sigma_1 \text{ et } \sigma_2 \text{ telles que } \sigma_1 \neq \sigma_2$$

En deuxième lieu, R. Hooper a vérifié la validité de ses calculs théoriques au moyen de calculs numériques programmés sur ordinateur. Le programme élaboré permettait de calculer la réponse à un signal pseudo-aléatoire ternaire du système à identifier, et ensuite les fonctions d'intercorrélation du premier et second ordre entre cette réponse et le signal pseudo-aléatoire ternaire. Le calcul des fonctions d'intercorrélation a été réalisé sur un temps d'intégration égal à la période T du signal, puisque les fonctions d'autocorrélation de celui-ci sont parfaitement définies sur la période T. La méthode de mesure a été testée sur différents systèmes. Les résultats des calculs ont montré que la mesure des noyaux du premier ordre était obtenue avec une précision meilleure que 0,2 %, la période T étant égale à seulement deux fois le temps d'établissement du système. En ce qui concerne la mesure des noyaux du second ordre, la précision est de 1 % lorsque la période est égale à 100 fois le temps d'établissement du système, ce qui n'est pas surprenant outre mesure car, dans ses calculs, R. Hooper n'avait pas tenu compte de l'existence des pics parasites de la fonction d'autocorrélation du second ordre. Cependant la méthode de Hooper, à précision égale, nécessite un temps d'intégration T sept fois moins long que la méthode utilisant un bruit blanc gaussien [6].

Il semble donc que, pour la mesure des noyaux des systèmes non-linéaires du second ordre, la méthode de Hooper présente des avantages certains sur la méthode générale définie au chapitre II.

CHAPITRE VII : MESURE DU NOYAU D'UN SYSTEME LINEAIRE AU MOYEN DE SIGNAUX PSEUDO-ALEATOIRES TERNAIRES

VII.1. - EXPRESSION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU PREMIER ORDRE D'UN SYSTEME LINEAIRE EXCITE PAR UN SIGNAL QUELCONQUE

Pour un système quelconque, la fonction d'intercorrélation du premier ordre, $\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma)$, entre le signal de sortie y(t) et le signal d'entrée x(t) est la valeur moyenne du produit $y(t)x(t-\sigma)$:

$$[VII.1.1] \quad \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T y(t)x(t-\sigma)\,dt = \overline{y(t)x(t-\sigma)}$$

Dans le cas où le système est linéaire (cf. chapitre I), le signal de sortie y(t) s'exprime en fonction du signal d'entrée x(t) par la relation :

$$[VII.1.2] \quad y(t) = h_o + \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau$$

dans laquelle h_o est la valeur initiale de y(t), et $h(\tau)$ est le noyau de Volterra ou réponse impulsionnelle du système. En remplaçant dans la relation [VII.1.1] y(t) par son expression [VII.1.2], et en inversant l'ordre des intégrations on obtient :

$$[VII.1.3] \quad \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) = h_o\,\overline{x(t-\sigma)} + \int_0^\infty h(\tau)\overline{x(t-\tau)x(t-\sigma)}\,d\tau$$

On effectue alors le changement de variable : $t-\tau = \lambda$:

$$[VII.1.4] \quad \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) = h_o\,\overline{x(\lambda+\tau-\sigma)} + \int_0^\infty h(\tau)\,\overline{x(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)}\,d\tau$$

Or :

$$[VII.1.5] \quad \overline{x(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma)} = \Phi^{(1)}_{xx}(\sigma-\tau)$$

et par suite :

$$[VII.1.6] \quad \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) = h_o\,\overline{x(\lambda+\tau-\sigma)} + \int_0^\infty h(\tau)\,\Phi^{(1)}_{xx}(\sigma-\tau)\,d\tau$$

La fonction d'intercorrélation du premier ordre d'un système linéaire excité par un signal quelconque dépend donc de la valeur moyenne et de la fonction

d'autocorrélation du premier ordre de ce signal. Dans le cas particulier où la valeur moyenne du signal d'entrée est nulle, cette fonction n'est autre que la réponse du système linéaire à la fonction d'autocorrélation du signal d'entrée:

$$[VII.1.7] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \int_0^{\infty} h(\tau)\, \Phi_{xx}(\sigma-\tau)\, d\tau$$

Par ailleurs si x(t) est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A :

$$[VII.1.8] \quad \begin{cases} \overline{x(\lambda+\tau-\sigma)} = 0 \\ \Phi_{xx}^{(1)}(\sigma-\tau) = A\ \delta(\sigma-\tau) \end{cases}$$

de telle sorte que l'expression de la fonction d'intercorrélation s'écrit simplement :

$$[VII.1.9] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = A\ h(\sigma)$$

Ce résultat n'est pas surprenant car pour un système linéaire le noyau de Volterra et le noyau de Wiener sont confondus et il est donc normal que, dans ce cas, la méthode de Wiener permette de mesurer le noyau de Volterra.

VII.2. - CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU PREMIER ORDRE D'UN SYSTEME LINERAIRE EXCITE PAR UN SIGNAL PSEUDO-ALEATOIRE TERNAIRE

Le signal d'entrée x(t) étant pseudo-aléatoire ternaire, sa valeur moyenne est nulle et la fonction d'intercorrélation est définie par la relation [VII.1.7] :

$$[VII.2.1] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \int_0^{\infty} h(\tau)\, \Phi_{xx}^{(1)}(\sigma-\tau)\, d\tau$$

Contrairement à R. Hooper qui, à ce stade du calcul, avait assimilé la fonction d'autocorrélation du signal pseudo-aléatoire à une suite d'impulsions de Dirac, nous calculons l'intégrale de convolution [VII.2.1] en exprimant $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma)$ par les relations établies au paragraphe [VII.2]. Les calculs effectués en Annexe XII permettent d'obtenir l'expression analytique de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ pour des valeurs de σ comprises dans le domaine $[o, \frac{T}{2} - \Delta t]$.

$$[VII.2.2] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + K \left[\frac{\sigma}{\Delta t} - 1 \right] H_1(o) + \frac{K}{\Delta t} \left[H_2(\sigma+\Delta t) + H_2(o) - 2H_2(\sigma) \right] \\ o \leqslant \sigma \leqslant \Delta t \end{cases}$$

$$[VII.2.3] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + \frac{K}{\Delta t} \left[H_2(\sigma+\Delta t) + H_2(\sigma-\Delta t) - 2\, H_2(\sigma) \right] \\ \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \frac{T}{2} - \Delta t \end{cases}$$

Dans ces relations :

$$[VII.2.4] \quad \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} = \frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma-nT+\Delta t) + H_2(\sigma-nT-\Delta t) - 2\,H_2(\sigma-nT) + 2\,H_2(\sigma-\frac{nT}{2}) - H_2(\sigma-\frac{nT}{2}+\Delta t) - H_2(\sigma-\frac{nT}{2}-\Delta t)\right]$$

$$[VII.2.5] \quad \begin{cases} K = \dfrac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B^2 \\ \dfrac{d}{d\sigma}[H_1(\sigma)] = h(\sigma) \\ \dfrac{d}{d\sigma}[H_2(\sigma)] = H_1(\sigma) \end{cases}$$

Si l'expression analytique du noyau $h(\sigma)$ est connue, les relations [VII.2.2] et [VII.2.3] permettent le calcul de la fonction d'intercorrélation. Cependant, le moyen $h(\sigma)$ n'apparaissant pas de façon explicite dans ces relations, il est impossible de conclure dans le cas général. Toutefois, le développement en séries de Taylor des intégrales première et seconde de $h(\sigma)$ autour de points bien choisis permet d'exprimer $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ en fonction du noyau $h(\sigma)$ et de ses dérivées successives. Les calculs effectués en Annexe XIII montrent que :

$$[VII.2.6] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + K\left[\frac{\sigma}{\Delta t} - 1\right] H_1(o) + \frac{K}{\Delta t}\left[H_2(o) - H_2(\sigma) + \Delta t\, H_1(\sigma) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} h^{(k-2)}(\sigma)\right] \\ o \leqslant \sigma \leqslant \Delta t \end{cases}$$

$$[VII.2.7] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + \frac{2K}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{2k}}{2k!} h^{(2k-2)}(\sigma) \\ \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \frac{T}{2} - \Delta t \end{cases}$$

Dans ces relations :

$$[VII.2.8] \quad \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} = \frac{2}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t}{2k!}\left[h^{(2k-2)}(\sigma-nT) - h^{(2k-2)}(\sigma - \frac{nT}{2})\right]$$

$$[VII.2.9] \quad \begin{cases} K = \dfrac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B^2 \\ h^{(k)}(\sigma) = \dfrac{d^k}{d\sigma^k}[h(\sigma)] \\ h^{(o)}(\sigma) = h(\sigma) \end{cases}$$

De même que R. Hooper, nous considérons le cas des systèmes linéaires par un noyau $h(\sigma)$ appartenant à l'espace L^2 des fonctions de carré sommable, c'est-à-dire les systèmes dont la fonction de transfert ne comporte aucun pôle de valeur nulle. En général, le noyau de tels systèmes est décomposable en une somme de fonctions tempérées. Dans ce cas, nous pouvons choisir l'incrément temporel Δt et le nombre m des coefficients du signal pseudo-aléatoire de telle sorte que la condition suivante soit satisfaite :

$$[VII.2.10] \qquad \frac{\Delta t^{2k}}{2k!} \left| h^{(2k-2)}(\sigma) \right| \ll \frac{\Delta t^2}{2} h(\sigma) \qquad \text{pour } k > 1$$

Le noyau $h(\sigma)$ étant une fonction tempérée il s'ensuit alors que sont satisfaites les conditions :

$$[VII.2.11] \quad \begin{cases} \dfrac{\Delta t^{2k}}{2k!} \left| h^{(2k-2)}(\sigma - nT) \right| \ll \dfrac{\Delta t^{2k}}{2k!} \left| h^{(2k-2)}(\sigma - \dfrac{nT}{2}) \right| \ll \dfrac{\Delta t^2}{2} h(\sigma) \\ \text{pour } n \leqslant -1 \end{cases}$$

Par suite :

$$[VII.2.12] \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \simeq 0 \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{2k}}{2k!} h^{(2k-2)}(\sigma) \simeq \frac{\Delta t^2}{2} h(\sigma) \end{cases}$$

et les relations [VII.2.6] et [VII.2.7] s'écrivent alors :

$$[VII.2.13] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) \simeq K \left[\dfrac{\sigma}{\Delta t} - 1 \right] H_1(o) + \dfrac{K}{\Delta t} \left[H_2(o) - H_2(\sigma) + \Delta t \, H_1(\sigma) + \displaystyle\sum_{k=2}^{3} \frac{\Delta t^k}{k!} h^{(k-2)}(\sigma) \right] \\ o \leqslant \sigma \leqslant \Delta t \end{cases}$$

$$[VII.2.14] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) \simeq K \, \Delta t \, h(\sigma) \\ \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \dfrac{T}{2} - \Delta t \end{cases}$$

De la relation [VII.1.14], on peut immédiatement conclure que pour les valeurs de σ telles que $\Delta t \leqslant \sigma \leqslant \frac{T}{2} - \Delta t$, $\Phi_{yx}^{(1)}$ est proportionnelle au noyau $h(\sigma)$, et en explicitant K celui-ci est exprimé par la relation :

$$[VII.2.15] \quad \begin{cases} h(\sigma) = \dfrac{3^m - 1}{2x3^{m-1} \, \Delta t \, B^2} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) \\ \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \dfrac{T}{2} - \Delta t \end{cases}$$

Cette relation est identique à la relation [VI.3.5] établie par Hooper.

Pour les valeurs de σ comprises entre 0 et Δt, il n'est pas possible de conclure. Cependant, il est possible d'évaluer la valeur de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ pour $\sigma = 0$:

[VII.2.16] $$\Phi_{yx}^{(1)}(o) = K\left[\frac{\Delta t}{2} h(\sigma) + \frac{\Delta t^2}{\sigma} h^{(1)}(\sigma)\right]$$

Compte tenu de la condition [VII.2.10], la valeur approchée au premier ordre de $\Phi_{yx}^{(1)}(o)$ est :

[VII.2.17] $$\Phi_{yx}^{(1)}(o) = \frac{K\,\Delta t}{2} h(o)$$

Par suite, la valeur mesurée de $h(o)$ est environ la moitié de la valeur réelle de $h(o)$, et les valeurs mesurées de $h(\sigma)$, pour les valeurs de σ telles que $0 \leqslant \sigma < \Delta t$, seront inférieures aux valeurs réelles correspondantes de $h(\sigma)$. Cette anomalie s'explique par le fait que la fonction d'autocorrélation du premier ordre des signaux pseudo-aléatoires ternaires n'est pas une fonction de Dirac. Toutefois, dans ses travaux, R. Hooper ne mentionne pas cette anomalie et les représentations graphiques des noyaux qu'il a mesurés ne laissent pas supposer son existence. Il n'en reste pas moins que les signaux pseudo-aléatoires ternaires permettent de faire d'excellentes mesures des noyaux des systèmes linéaires pour les valeurs de σ comprises entre Δt et $\frac{T}{2} - \Delta t$.

CHAPITRE VIII : EXPERIENCES REALISEES SUR LE REACTEUR CABRI

VIII.1. - BUT DES EXPERIENCES

Bien que les propriétés statistiques des signaux pseudo-aléatoires ternaires présentent des analogies avec celles des bruits blancs gaussiens, d'un point de vue théorique, il est impossible de prévoir si ces signaux sont convenables pour mesurer les noyaux du premier et second ordre des systèmes caractérisés par une infinité de noyaux comme c'est le cas pour les réacteurs nucléaires. Cette impossibilité est due principalement au fait que la définition analytique des fonctions d'autocorrélation d'ordre impair de ces signaux pose de grandes difficultés. En vue d'éclaircir le problème, il était nécessaire de procéder à des expériences sur un réacteur à basse puissance, tout en tenant compte des résultats théoriques obtenus avec les bruits blancs gaussiens.

En particulier, la conclusion du chapitre IV précise que la mesure des noyaux de Volterra d'un réacteur à basse puissance suppose l'utilisation de signaux ayant des propriétés analogues à celles des bruits blancs gaussiens et que la valeur moyenne de la réponse en puissance à ces signaux reste constante. Or, la réponse en puissance d'un réacteur à tout signal de valeur moyenne nulle est divergente, donc, particulièrement, la réponse à un signal pseudo-aléatoire ternaire.

Comme pour les bruits blancs gaussiens, le signal de réactivité $\Delta k(t)$ appliqué au réacteur doit être la somme d'un signal pseudo-aléatoire ternaire $x(t)$ et d'un échelon négatif de réactivité d'amplitude E :

$$[\text{VIII.1.1}] \quad \begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - E\,u(t) \\ x(t) \quad : \text{signal pseudo-aléatoire ternaire.} \end{cases}$$

Dans le cas des bruits blancs gaussiens (cf. § V.4) nous avions montré que E était le rapport de la densité spectrale du bruit blanc et du temps de vie moyen des neutrons. Pour ce qui est des signaux pseudo-aléatoires ternaires, il est donc certain que E dépendra des caractéristiques statistiques de ces signaux et des paramètres des équations de la cinétique.

Le but premier des expériences réalisées sur le réacteur CABRI était la détermination de l'amplitude E pour différentes valeurs des paramètres caractéristiques des signaux pseudo-aléatoires ternaires. L'amplitude E une fois déterminée, il convenait alors de vérifier que, le réacteur étant excité par le signal de réactivité $\Delta k(t)$ défini par la relation [VIII.1.1], la valeur moyenne de la réponse en puissance reste constante, et d'autre part que, dans ce cas, la fonction d'autocorrélation du premier ordre entre

la réponse en puissance y(t) et le signal pseudo-aléatoire ternaire x(t) est proportionnelle au noyau du premier ordre des équations de la cinétique.

VIII.2. - DISPOSITIF EXPERIMENTAL (cf. fig. 5)

Le signal de réactivité est produit par un modulateur de réactivité immergé dans la piscine du réacteur CABRI. Le coeur du réacteur comprend 20 éléments combustibles à 18 plaques, 4 éléments de contrôle-sécurité à 14 plaques et de 8 éléments incomplets chargés de 7 ou 8 plaques combustibles et de 7 ou 6 plaques d'aluminium (cf. fig.4). Le contrôle du fonctionnement du réacteur est assuré par 4 barres de contrôle-sécurité du type fourchette dont les parties absorbantes sont en cadmium-nickel. Le démarrage du réacteur est assuré par une source antimoine-béryllium, et les mesures neutroniques par un ensemble de chambres d'ionisation ou à fission disposé contre le coeur du réacteur. L'emplacement du modulateur sur la grille porte-éléments a été choisi de façon à perturber le moins possible le fonctionnement du réacteur et les mesures neutroniques, tout en garantissant le maximum d'efficacité pour la modulation.

La partie active du modulateur est constituée par deux secteurs de cadmium dont les dimensions, hauteur, largeur et épaisseur sont respectivement de 700, 25 et 1 mm. Ceux-ci sont accolés à un tube d'aluminium AG3 et positionnés de façon diamétralement opposée. L'ensemble tube et secteurs constitue un tambour mobile qui est entraîné par un moteur-réducteur commandé par un asservissement de position. Le moteur-réducteur ainsi que les différents éléments électromécaniques d'asservissement constituent la "tête" du modulateur [5]. Cet ensemble mécanique est disposé dans un boîtier en aluminium AG3 de dimensions convenables pour qu'il puisse être installé dans le réacteur comme un élément combustible. La partie inférieure du boîtier est remplie d'eau déminéralisée de façon à ce que le tambour soit immergé totalement, ceci pour que l'amplitude de la modulation soit maximale et pour éviter qu'un vide trop important ne perturbe le fonctionnement du réacteur. Deux câbles relient la "tête" du modulateur à l'ensemble électronique d'asservissement et de commande.

On peut montrer que la perturbation de réactivité Δk introduite par le modulateur est proportionnelle au cosinus du double de l'angle défini par l'axe diamétral joignant les milieux des deux secteurs de cadmium et la perpendiculaire au bord du coeur du réacteur [5]. Les variations de la réactivité sont donc obtenues en faisant varier la position du tambour. C'est pourquoi celui-ci est asservi en position. L'ensemble électronique d'asservissement et de commande permet de définir la position du tambour, donc la réactivité introduite, soit manuellement au moyen d'un potentiomètre dix tours, soit automatiquement en commandant l'asservissement au moyen d'un signal quelconque.

Dans le cas qui nous intéresse, l'asservissement de position est commandé par des signaux pseudo-aléatoires ternaires. La génération de ces signaux est assurée par un ordinateur CII 90-40. Un premier programme permet de calculer les (3^m-1) valeurs du signal à partir des données qui définissent celui-ci (les m valeurs des coefficients a_i, et les m premières valeurs du signal) et assure le rangement des valeurs calculées en

mémoire. La génération en temps réel du signal est effectuée par un deuxième programme. Les valeurs du signal, définies par un code à deux variables binaires, sont commutées séquentiellement sous la forme d'impulsions sur deux lignes de sortie du calculateur. Ce programme utilise en donnée l'incrément temporel Δt qui fixe la cadence à laquelle sont délivrées les impulsions et la période T de la chaîne ternaire. Les valeurs du signal sont donc définies par des impulsions synchrones.

Les valeurs analogiques du signal ternaire sont élaborées à partir de ces impulsions et au moyen d'un interface. Celui-ci se compose d'un ensemble de circuits logiques et d'un commutateur électronique utilisant des portes à transistor à effet de champ. L'ensemble logique transforme les impulsions synchrones en niveaux codés qui commandent les portes du commutateur. La sortie de ce commutateur délivre le signal à trois niveaux qui, appliqué à l'entrée de l'asservissement de position, permet d'obtenir le signal pseudo-aléatoire de réactivité convenable.

Les variations de la puissance sont mesurées au moyen d'une chambre à fission du type 3C2B connectée à un ensemble de mesure différentielle de la puissance (MDP). Cet appareil quantifie le niveau continu de la puissance, et délivre un signal analogique proportionnel aux variations de la puissance autour de ce niveau.

La réactivité étant définie par la position du tambour du modulateur, l'étalonnage position-réactivité permet de déduire le signal de réactivité du signal de position délivré par le potentiomètre linéaire couplé à l'axe du tambour.

Enfin, l'acquisition des données, signal de la MDP et signal de position, est assurée par un enregistreur analogique multivoies Ampex type FR 1800.

VIII.3. - DESCRIPTION DES PROCESSUS EXPERIMENTAUX

En premier lieu, il convient d'effectuer l'étalonnage position-réactivité du modulateur. La méthode utilisée consiste à faire diverger le réacteur par éjection d'une barre de contrôle-sécurité depuis la fin de course bas jusqu'à la fin de course haut, les trois autres barres étant à une cote définie et fixée une fois pour toute au cours de l'étalonnage, le tambour du modulateur étant à la position θ qu'on veut étalonner et qui est réglée manuellement au moyen du potentiomètre dix tours. La réactivité introduite ainsi est la somme des perturbations de réactivité causées par la barre éjectée et par le modulateur. Comme l'éjection de la barre cause une perturbation identique, quelle que soit la position θ du tambour, la mesure de la réactivité globale permet donc de déduire la perturbation de réactivité due au modulateur et correspondant à chaque position θ du tambour. La réactivité est soit directement mesurée au moyen d'un réactimètre, soit déduite de la mesure du temps de doublement de la puissance au moyen de la formule de Nordheim. Dans ce dernier cas, le temps de doublement considéré est la moyenne de plusieurs mesures effectuées au moyen d'un Td-Mètre. Cette méthode est précise pourvu que l'on prenne soin d'espacer suffisamment les expériences de façon à ce que les neutrons retardés n'aient pas d'influence appréciable sur la mesure.

En second lieu, il est nécessaire de déterminer l'amplitude E de l'échelon négatif de réactivité telle que la valeur moyenne de la puissance reste constante lorsque le réacteur est excité par un signal de réactivité :

[VIII.3.1] $\Delta k(t) = x(t) - E\ u(t)$

x(t) étant un signal pseudo-aléatoire ternaire.

Ne disposant pas d'éléments suffisants pour définir théoriquement E, nous avons tenu le raisonnement purement subjectif suivant : si E a une valeur telle que les conditions précédemment énoncées soient satisfaites, c'est que un signal de réactivité pseudo-aléatoire ternaire fait diverger la valeur moyenne de la puissance avec une période correspondant à un excédent de réactivité de valeur E. La détermination expérimentale de E s'effectue alors de façon simple. Le réacteur étant initialement stabilisé à une puissance n_o, on le soumet à un signal de réactivité pseudo-aléatoire ternaire pendant un temps multiple de la période de ce signal, et on mesure la valeur finale de la puissance moyenne. Cette mesure permet le calcul du temps de doublement de la divergence et la déduction de l'excédent de réactivité E introduit par le signal. En répétant cette expérience pour différentes valeurs des paramètres caractéristiques du signal, valeurs des coefficients a_i, de l'incrément temporel Δt et de l'amplitude B, on peut mettre en évidence l'influence de ceux-ci sur la valeur de E.

Ensuite, il convient de vérifier que les valeurs de E ainsi mesurées permettent d'obtenir un signal de réactivité tel que la valeur moyenne de la puissance reste effectivement constante. Dans le cas où cette vérification est concluante, ces expériences permettent aussi de vérifier qu'il est possible de mesurer le noyau du premier ordre des équations de la cinétique par intercorrélation entre les variations de la puissance et le signal pseudo-aléatoire ternaire. C'est pourquoi, en vue du calcul ultérieur de la fonction d'intercorrélation, il convient d'enregistrer sur bande magnétique les signaux de la MDP et le signal de position du modulateur au cours de ces expériences. Nous procédons de la façon suivante : le réacteur étant initialement stabilisé à une puissance n_o, le tambour du modulateur étant à la position θ_o. Lors de la mise en route du programme de génération du signal pseudo-aléatoire ternaire, la position θ_o, qui correspond à une réactivité nulle, est décalée d'une valeur $\Delta\theta$, correspondant à l'amplitude E déterminée expérimentalement pour le signal utilisé, de telle sorte que le signal de réactivité introduit est conforme à la relation [VIII.3.1]. Chaque test est effectué pendant une période T du signal utilisé. A la fin de chaque test, le tambour du modulateur est repositionné à la position θ_o et on mesure alors la valeur de la puissance finale et de la réactivité. Si le signal de réactivité est convenable, la puissance doit avoir pour valeur n_o et la réactivité doit être nulle.

En dernier lieu, les signaux enregistrés sur bande magnétique sont numérisés à l'aide du calculateur 90-40, puis traités sur ordinateur IBM 360 par un programme d'intercorrélation écrit en langage FORTRAN.

VIII.4. - RESULTATS

L'étalonnage position-réactivité du modulateur s'est effectué dans de bonnes conditions. L'écart entre les mesures effectuées au moyen du réactimètre et celles déduites du temps de doublement de la puissance est de 1 pcm au maximum, et ces mesures sont reproductibles au pcm près. L'erreur absolue maximale commise lors de l'étalonnage est donc de 2 pcm. La courbe d'étalonnage $\Delta k=f(\theta)$ est représentée à la figure 6. Cette courbe a une allure sinusoïdale et elle montre que l'amplitude crête à crête de la perturbation de réactivité est de 180 pcm.

Les expériences de modulation ont été réalisées avec des signaux pseudo-aléatoires ternaires caractérisés par sept coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_7$ de valeurs respectives: 1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, les sept premières valeurs du signal étant +1. Différentes expériences ont été effectuées pour des valeurs de l'amplitude B égales à 80 et 56 pcm, l'incrément temporel Δt ayant pour valeurs 0,15 et 0,3 seconde.

Les expériences destinées à déterminer la valeur de l'amplitude E ont montré que, pour les signaux utilisés, celle-ci ne dépassait pas la dizaine de pcm. Il s'ensuit que l'erreur relative commise sur la mesure de E est importante, 10 % au minimum dans les cas les plus favorables. Par ailleurs, la reproductibilité des expériences est très mauvaise notamment pour les signaux caractérisés par un incrément temporel Δt de 0,3 s ou pour une amplitude B de 56 pcm. Ceci peut être expliqué par le fait que l'asservissement de position permet de définir la position du tambour un degré près, ce qui implique une erreur de un pcm sur la perturbation de réactivité. Cette erreur a d'autant plus d'influence sur la précision globale de la mesure de E que les expériences durent longtemps, cas où Δt = 0,3 s, et que l'amplitude du signal est faible, cas où B=56 pcm. Les résultats suivants ont été obtenus :

B en pcm	Δt en s	E en pcm	ΔE erreur en pcm
80	0,15	10,5	$\pm$ 0,5
80	0,3	10,8	$\pm$ 1
56	0,15	7,5	$\pm$ 1

la puissance du réacteur étant comprise entre 100 et 500 W. Ces mesures permettent de conclure que la valeur de E dépend beaucoup de l'amplitude B des signaux, ce qui semble normal, mais assez peu de l'incrément temporel Δt.

En ce qui concerne les expériences de vérification, les résultats ont été quelque peu décevants. Dans tous les cas, il a été observé que la valeur moyenne de la puissance ne restait pas constante. Celle-ci était soit divergente soit convergente avec des périodes correspondant à des défauts de réactivité de l'ordre de 2 pcm au maximum, qui peuvent être attribués au manque de définition de la position du tambour, comme pour les expériences précédentes. Par ailleurs, le dépouillement de ces expériences s'est avéré inexploitable en raison de la grande dispersion des points calculés de la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre les variations de puissance et le signal pseudo-aléatoire ternaire. Cette fonction est apparue comme noyée dans un bruit. Il est un fait que les variations de la puissance mesurées au moyen de la MDP présentaient un mauvais rapport signal sur bruit dû à la présence inévitable du bruit naturel du réacteur. Ce-

pendant, ce bruit n'étant pas corrélé ne devrait pas avoir une influence notable sur la mesure de la fonction d'intercorrélation. Mais, comme cette fonction est calculée par une méthode numérique, les signaux à intercorréler sont nécessairement échantillonnés. Les programmes écrits sur calculateur 90-40 ne permettant pas de définir un signal par plus de 20 000 valeurs, il s'ensuit que la cadence d'échantillonnage est limitée à 9 points par incrément temporel Δt, ce qui ne permet pas une définition suffisante des signaux à intercorréler. Par ailleurs, le bruit qui entache la mesure de la fonction d'intercorrélation peut être attribué au fait que lors de ces expériences, la valeur moyenne de la puissance n'est jamais restée constante.

Comme ni la théorie, ni les expériences ne permettent de conclure quant à l'aptitude éventuelle des signaux pseudo-aléatoires ternaires à mesurer le noyau du premier ordre des équations de la cinétique, il s'avère donc nécessaire de recourir à un calcul numérique.

CHAPITRE IX : INTERPRETATION NUMERIQUE

IX.1. - BUT DE L'INTERPRETATION NUMERIQUE

Les résultats des expériences effectuées sur le réacteur CABRI ne permettent pas de conclure quant à la validité de la méthode utilisée. D'une part, il est possible que les signaux pseudo-aléatoires ne remplissent pas toutes les conditions requises pour obtenir une mesure précise du fait que leurs propriétés statistiques ne sont pas exactement les mêmes que celles des bruits blancs gaussiens. D'autre part les dispositifs expérimentaux utilisés ne permettent pas d'attribuer au paramètre E une valeur suffisamment précise pour que le signal de réactivité soit parfaitement défini. Enfin, le calcul de la fonction d'intercorrélation puissance-réactivité est faussé par la présence inévitable du bruit naturel qui entache le signal de puissance.

Au contraire, le calcul numérique, en raison de sa grande précision, permet de lever les indéterminations dues à l'imprécision du dispositif expérimental et du système de mesure. Par suite, les résultats de ce calcul permettent, d'une part, de vérifier les résultats expérimentaux obtenus, et d'autre part, de conclure sur la validité de la méthode utilisée. Pour mener à bien l'interprétation numérique des expériences, il est donc nécessaire d'élaborer un programme permettant le calcul de la réponse en puissance du réacteur CABRI à un signal de réactivité pseudo-aléatoire ternaire. La fonction d'intercorrélation puissance-réactivité est ensuite calculée au moyen du programme utilisé lors du dépouillement des expériences.

IX.2. - PRINCIPE DU PROGRAMME NUMERIQUE

Le programme est écrit en langage FORTRAN H et utilisé sur ordinateur IBM 360. Il comprend un programme principal assurant l'ordonnancement séquentiel du calcul et deux sous-programmes (cf. fig. 9).

Le premier sous-programme calcule les valeurs C_j du signal pseudo-aléatoire ternaire à partir des données qui sont les valeurs initiales $C_1, \ldots, C_7$ de ce signal et les valeurs attribuées aux coefficients $a_1, \ldots, a_7$, et au moyen de la formule de récurrence :

$$[IX.2.1] \qquad C_j = \sum_{i=1}^{7} a_i \, C_{j-i} \qquad (\text{mod } 3)$$

Le deuxième sous-programme calcule la réponse en puissance n(t) du réacteur CABRI au signal de réactivité $\Delta k(t)$. La puissance est calculée en résolvant les équations de la cinétique au moyen d'une méthode de Runge-Kutta programmée en biblio-

thèque de l'IBM 360. Les équations de la cinétique sont définies par le système suivant :

$$[IX.2.2] \quad \begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = \dfrac{\Delta k(t) - \beta}{\Lambda} n(t) + \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \lambda_i C_i(t) \\ \dfrac{dC_i}{dt} = \dfrac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t) \end{cases}$$

dans lequel il a été considéré six groupes de neutrons retardés définis par les constantes suivantes :

Groupe i	Constante de décroissance λ_i	Concentration relative a_i
1	0,0124	0,033
2	0,0305	0,219
3	0,111	0,196
4	0,301	0,395
5	1,14	0,115
6	3,01	0,042

Ces constantes caractérisent la fission de l'uranium 235 enrichi à 99,9 % [8]. Par ailleurs, pour le réacteur CABRI, le temps de vie moyen des neutrons et le nombre total des neutrons retardés ont pour valeurs respectives : $\Lambda = 50\ 10^{-6}$s et $\beta = 770\ 10^{-5}$. Le nombre de neutrons retardés β_i du groupe i se déduit de la concentration relative au moyen de la relation :

$$[IX.2.3] \quad \beta_i = a_i \beta$$

De plus, l'initialisation du calcul requiert la connaissance des valeurs initiales $n(o)$ et $C_i(o)$.

Le programme principal utilise en données l'incrément temporel Δt et le nombre m, ici égal à 7,des coefficients définissant le signal pseudo-aléatoire ternaire, pour assurer l'ordonnancement séquentiel du calcul, c'est-à-dire principalement l'appel des sous-programmes. Par ailleurs, il utilise l'amplitude B et le paramètre E pour définir le signal de réactivité $\Delta k(t)$. Le pas de calcul est choisi égal à $\frac{\Delta t}{20}$ de façon à ce que la puissance n(t) soit calculée avec une bonne précision (de l'ordre de 10^{-5} pour les signaux de réactivité considérés).

Le sous-programme de calcul des valeurs du signal pseudo-aléatoire ternaire est appelé avec un pas égal à l'incrément temporel Δt, soit tous les vingt pas de calcul. Le programme principal calcule alors la valeur $x(j\Delta t)$ du signal pseudo-aléatoire ternaire de réactivité :

$$[IX.2.4] \quad x(j\Delta t) = B\ C_j$$

valeur qui est maintenue constante tant qu'il n'est pas fait appel au sous-programme de calcul de C_j, soit pendant vingt pas de calcul, et qui est mise en mémoire tous les deux pas de calcul.

Le signal de réactivité $\Delta k(j\Delta t)$ appliqué au réacteur est ensuite calculé au moyen de la relation :

[IX.2.5] $$\Delta k(j\Delta t) = x(j\Delta t) - E\, u(t)$$

et utilisé par le sous-programme de calcul de la puissance qui est appelé à chaque pas de calcul. De même que les valeurs de $x(j\Delta t)$, les valeurs de $n(t)$ sont mises en mémoire tous les deux pas de calcul. Le programme principal arrête le calcul dès que le signal pseudo-aléatoire ternaire a effectué une période, c'est-à-dire après 20 (3^m-1) pas de calcul, soit 43 720 pas de calcul dans le cas considéré. Le calcul une fois terminé, le signal pseudo-aléatoire ternaire de réactivité $x(t)$ et la puissance $n(t)$ sont définis par 21 860 valeurs stockées en mémoire. Ces valeurs sont ensuite traitées par le programme d'intercorrélation utilisé lors du dépouillement des expériences.

Le programme d'intercorrélation assure le calcul de la valeur moyenne de la puissance :

[IX.2.6] $$\overline{n} = \frac{1}{T}\int_0^T n(t)\, dt$$

et des valeurs de la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre les variations relatives de la puissance $y(t)$ et le signal pseudo-aléatoire ternaire de réactivité $x(t)$:

[IX.2.7] $$\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)x(t-\sigma)\, dt$$

T étant la période de $x(t)$ et $y(t)$ étant définie par la relation :

[IX.2.8] $$y(t) = \frac{n(t) - n(o)}{n(o)}$$

Les données utilisées par ce programme sont l'incrément temporel Δt, la valeur initiale $n(o)$ de la puissance et le nombre des valeurs de $n(t)$ et de $x(t)$ stockées en mémoire, soit 21 860 dans le cas considéré. Pour les deux calculs, l'intégration est assurée par la méthode de Simpson et effectuée avec un pas correspondant à celui de la mise en mémoire des valeurs de $n(t)$ et de $x(t)$, soit $\frac{\Delta t}{10}$. Les valeurs de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ sont calculées avec un pas égal à l'incrément temporel Δt.

IX.3. - UTILISATION DU PROGRAMME NUMERIQUE

De même que pour les expériences réalisées sur le réacteur CABRI, il convient en premier lieu de déterminer la valeur du paramètre E tel que le signal de réactivité $\Delta k(t)$ engendre un signal de puissance n(t) dont les variations relatives y(t) aient une valeur moyenne nulle, c'est-à-dire tel que la valeur moyenne de n(t) soit n(o). Comme dans le cas des expériences, nous ne disposons pas d'éléments suffisants pour déterminer théoriquement la valeur de E. En conséquence, nous devons utiliser le programme numérique pour déterminer cette valeur. Cependant, il est possible de recourir à une méthode mieux adaptée théoriquement que la méthode de divergence utilisée lors des expériences.

En effet, dans le cas où le signal de réactivité est un bruit blanc gaussien, le paramètre E doit avoir pour valeur $\Phi_{yx}^{(1)}(o)$, c'est-à-dire la valeur à l'origine de la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre y(t) et x(t), le signal de réactivité appliqué au réacteur étant précisément défini par la relation :

[IX.3.1] $$\Delta k(t) = x(t) - \Phi_{yx}^{(1)}(o)\, u(t)$$

[cf. § V.1]

Considérant que les propriétés statistiques des bruits blancs gaussiens et des signaux pseudo-aléatoires ternaires sont comparables, il semble probable que le critère défini ci-dessus puisse être vérifié dans le cas des signaux pseudo-aléatoires ternaires. Si tel est le cas, la valeur de E peut être déterminée par une méthode d'itérations utilisant le programme numérique de calcul de la puissance du réacteur CABRI et le programme d'intercorrélation.

La première itération s'effectue en attribuant initialement au paramètre E une valeur nulle de telle sorte que le signal de réactivité appliqué au réacteur est :

[IX.3.1] $$\Delta k(t) = x(t)$$

Dans ce cas, la réponse en puissance n(t) est fortement divergente et le calcul de $\Phi_{yx}^{(1)}(o)$ conduit à une valeur excessive E_1 qu'on attribue à E pour le deuxième calcul. Pour celui-ci, le signal de réactivité appliqué au réacteur est :

[IX.3.2] $$\Delta k(t) = x(t) - E_1\, u(t)$$

La valeur E_1 étant excessive, la puissance n(t) sera convergente et le calcul de $\Phi_{yx}^{(1)}(o)$ conduit à une valeur trop faible E_2 qui est la nouvelle valeur à attribuer à E. Lors du calcul suivant, la puissance n(t) sera donc à nouveau divergente. A chaque itération, la puissance étant alternativement divergente et convergente, le processus itératif est convergent et aboutit à une valeur unique de la valeur moyenne de la puissance n(t).

Si ce processus itératif est effectivement convergent, il conviendra cependant de vérifier que la valeur moyenne de la puissance est bien n(o) et de comparer

les valeurs calculées de E avec celles déterminées expérimentalement au moyen de la méthode de divergence. Enfin, il sera possible d'établir si la fonction d'intercorrélation $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ est proportionnelle au noyau $h_1(\sigma)$ des équations de la cinétique conformément à la relation établie par Hooper (cf. § VI.3) :

[IX.3.3] $$h_1(\sigma) = \frac{3^m - 1}{2x3^{m-1}\ E^2\ \Delta t}\ \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$$

Par ailleurs, à chaque itération, il sera intéressant de calculer les valeurs de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ afin de mettre en évidence l'influence de la valeur de E sur ces valeurs.

IX.4. - RESULTATS

Le programme numérique a été utilisé pour le traitement de quatre cas. Pour chacun de ces cas, le signal pseudo-aléatoire ternaire était caractérisé par une amplitude B égale à 100 pcm et par des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_7$ de valeurs respectives : 1, 1, 1, -1, 1, 1 et -1, mais différencié par les valeurs attribuées à l'incrément temporel Δt et aux sept premières valeurs du signal $C_1, C_2, \ldots, C_7$:

— cas 1 : Δt = 0,15 s $\quad C_1=C_2=\ldots=C_7=1$

— cas 2 : Δt = 0,3 s $\quad C_1=C_2=\ldots=C_7=1$

— cas 3 : Δt = 0,15 s $\quad C_1=C_7=1,\ C_2=0,\ C_3=C_4=1,\ C_5=C_6=-1$

— cas 4 : Δt = 0,3 s $\quad C_1=C_7=1,\ C_2=0,\ C_3=C_4=1,\ C_5=C_6=-1$

Par ailleurs, dans tous les cas la puissance initiale a été choisie égale à 1 de telle sorte que la puissance n(t) calculée soit la puissance relative $\frac{n(t)}{n(o)}$.

Il a été procédé à quatre itérations successives pour les cas 1 et 2 et à cinq itérations pour les cas 3 et 4. Les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau suivant :

Cas →		1		2		3		4	
Itération ↓		E_{pcm}	$\frac{\bar{n}}{n(o)}$	E_{pcm}	$\frac{\bar{n}}{n(o)}$	E_{pcm}	$\frac{\bar{n}}{n(o)}$	E_{pcm}	$\frac{\bar{n}}{n(o)}$
1		0	1,206	0	1,451	0	1,237	0	1,522
2		10,47	0,970	12,83	0,885	10,45	0,995	12,80	0,930
3		8,46	1,010	8,02	1,053	8,73	1,030	8,61	1,083
4		8,80	1,003	9,47	0,998	9,00	1,025	9,74	1,038
5						8,95	1,025	9,42	1,051

Ces résultats montrent que le processus itératif envisagé est bien convergent. Cependant, il apparaît que la vitesse de convergence, de même que les valeurs finales de E et de $\frac{\bar{n}}{n(o)}$ diffèrent selon les cas. En effet, la convergence du processus est plus

rapide pour les cas 1 et 3 (Δt=0,15 s) que pour les cas 2 et 4 (Δt=0,3 s), cette constatation semblant liée au fait que, pour la première itération (E = 0) la valeur moyenne de la puissance relative, $\frac{\overline{n}}{n(o)}$, diverge de 50 % pour les cas 2 et 4, et de 25 % seulement pour les cas 1 et 3.

En ce qui concerne la valeur finale de E, celle-ci est légèrement plus grande, de 6 % environ, dans les cas 2 et 4 que dans les cas 1 et 3. Par ailleurs, la comparaison des cas 1 et 2 avec les cas 3 et 4 fait apparaître une légère influence des valeurs attribuées aux sept premières valeurs du signal, $C_1, C_2, \ldots, C_7$, sur la valeur finale de E. Enfin, des constatations identiques peuvent être faites sur les quatre cas en ce qui concerne les valeurs moyennes finales de la puissance relative, celles-ci étant égales à 1 à quelques pour-cents près. Par ailleurs, il est à remarquer que les valeurs calculées de E sont plus faibles que celles mesurées lors des expériences, alors que l'amplitude du signal pseudo-aléatoire ternaire était de 80 pcm seulement dans le cas des expériences.

Comme les valeurs de la fonction d'intercorrélation du premier ordre, $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$, entre les variations relatives de la puissance et le signal pseudo-aléatoire ternaire ont été calculées pour chaque itération, il est possible de dégager l'influence de E sur les valeurs de cette fonction. Pour chaque cas, les résultats des calculs ont été groupés sous la forme de tableaux consignés en Annexe XIV, et les courbes $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ obtenues sont représentées aux figures 10 - 11 - 12 et 13.

Ces courbes montrent que, pour la première itération (E=0), les valeurs des fonctions $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ sont assez dispersées, notamment pour les cas 2 et 4, de telle sorte que les courbes $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ apparaissent entachées d'un bruit. Par ailleurs, pour les cas 3 et 4 et pour la première itération, la plupart des valeurs de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ sont négatives, alors que le noyau $h_1(\sigma)$ est essentiellement positif. Cependant, au fur et à mesure que le processus itératif progresse, la dispersion des valeurs de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ diminue et ces valeurs convergent de la même façon que la valeur de E. Après quelques itérations, les courbes $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ sont pratiquement lisses, et il est possible de comparer les valeurs de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ pour les cas 1 et 3 (Δt = 0,15 s) de même que pour les cas 2 et 4 (Δt = 0,3 s). Cette comparaison montre que, lorsque les 7 premières valeurs du signal pseudo-aléatoire ternaire sont toutes égales à 1, les valeurs de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ sont plus faibles que dans le cas où les 7 valeurs initiales sont choisies différentes.

En dernier lieu et en vue de vérifier la validité de la méthode de mesure envisagée, nous avons calculé les valeurs numériques de $\Phi_{yx}^{(1)}$ conformément à la relation établie par R. Hooper, le noyau du premier ordre des équations de la cinétique étant exprimé selon la relation [III.3.7] :

$$[XIV.4.1] \qquad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \frac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B^2 \, \Delta t \left[\frac{1}{\Lambda} \left(A_o + \sum_{j=1}^{6} A_j \, e^{-\gamma_j \sigma} \right) \right]$$

Les valeurs des pôles γ_j et des coefficients A_o et A_j correspondants au temps de vie moyen des neutrons du réacteur CABRI (Λ = 50 10^{-6} s) ont été extraites de tableaux de constantes [7]. Le calcul a été effectué pour deux valeurs de

l'incrément temporel (Δt = 0,15 s et Δt = 0,3 s), le signal pseudo-aléatoire ternaire étant caractérisé par une amplitude B = 100 pcm et un nombre m de coefficients égal à 7.

Les résultats de ce calcul sont regroupés en Annexe XIV-e. Les valeurs théoriques de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ ainsi obtenues sont plus grandes que celles calculées au moyen du programme numérique (cf. fig. 14 et 15). L'erreur relative sur la mesure du noyau est de 20 à 30 % selon les valeurs de σ. Compte tenu de l'importance de cette erreur et des anomalies constatées précédemment, il apparaît que les signaux pseudo-aléatoires ne peuvent être utilisés pour mesurer le noyau du premier ordre des équations de la cinétique.

RESUME

La méthode générale de mesure des noyaux de Wiener d'un système non-linéaire est applicable aux systèmes dont les noyaux de Wiener sont des fonctions de carré sommable. La mesure de ces noyaux est obtenue en excitant le système à identifier au moyen d'un bruit blanc gaussien de densité spectrale A et en calculant les fonctions d'intercorrélation entre ce bruit blanc x(t) et la réponse y(t) du système. Le noyau d'ordre n est alors proportionnel à la fonction d'intercorrélation d'ordre n :

$$\begin{cases} k_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \dfrac{1}{n!\ A^n}\ \Phi^{(n)}_{yx}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \\ \Phi^{(n)}_{yx}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{T} \int_0^T y(t)x(t-\sigma_1)\ \ldots\ x(t-\sigma_n)\ dt \\ x(t) : \text{bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \end{cases}$$

Nous avons montré que cette méthode générale n'est pas applicable à la mesure des noyaux de Wiener d'un réacteur à basse puissance. En effet, le comportement dynamique d'un réacteur à basse puissance est défini par les équations de la cinétique dont la solution intégrale peut être développée en une série de Volterra. Les noyaux de Volterra de ces équations s'expriment tous en fonction du noyau du premier ordre :

$$\begin{cases} h_1(\sigma) = G(\sigma) = \dfrac{1}{\Lambda}\left[A_o + \sum_{j=1}^{m} A_j\ e^{-\gamma_j t} \right] u(t) \\ \Lambda,\ A_o,\ A_j : \text{constantes caractérisant les équations de la cinétique} \end{cases}$$

au moyen de la relation de récurrence :

$$h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = G(\sigma_1)\ G(\sigma_2-\sigma_1)\ \ldots\ G(\sigma_n - \sigma_{n-1})$$

Le noyau $h_1(\sigma)$ n'étant pas une fonction de carré sommable, il s'ensuit que tous les noyaux de Volterra d'ordre n quelconque ne sont pas des fonctions de carré sommable. La relation générale établie entre noyaux de Wiener et noyaux de Volterra permet alors de conclure que les noyaux de Wiener des équations de la cinétique ne sont pas non plus des fonctions de carré sommable . D'autre part, nous avons montré que ces noyaux n'ont pas d'existence réelle et que cette inexistence est liée au fait que la puissance est divergente lorsque le signal de réactivité est un bruit blanc gaussien.

Cependant, il est possible de compenser les effets divergents du bruit blanc gaussien en ajoutant à celui-ci un échelon négatif de réactivité d'amplitude appropriée. Les calculs ont montré que si le réacteur est excité par un signal de réactivité $\Delta k(t)$

tel que :

$$\begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - \dfrac{A}{\Lambda}\, u(t) \\ x(t) \quad : \text{bruit blanc gaussien de densité spectrale A} \\ \Lambda \quad : \text{temps de vie moyen des neutrons} \\ u(t) \quad : \text{fonction de Heaviside} \end{cases}$$

la valeur moyenne de la puissance est constante et les noyaux de Volterra des équations de la cinétique peuvent être mesurés au moyen d'une méthode d'intercorrélation. En effet, dans ce cas, le noyau de Volterra d'ordre n est proportionnel à la fonction d'intercorrélation d'ordre n entre les variations relatives de la puissance, $y(t) = \dfrac{\Delta n(t)}{n_o}$ et le bruit blanc gaussien x(t) :

$$\begin{cases} h_n(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \dfrac{1}{n!\ A^n}\, \Phi^{(n)}_{yx}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \\ y(t) = \dfrac{\Delta n}{n_o}(t) \end{cases}$$

La vérification expérimentale de cette méthode a été entreprise sur le réacteur CABRI. Cependant, comme il est difficile de générer un signal de réactivité qui soit un bruit blanc gaussien, nous avons dû utiliser, en remplacement, les signaux pseudo-aléatoires ternaires, étudiés par R. Hooper en vue de la mesure des noyaux du premier et second ordre d'une classe de systèmes non-linéaires. En effet, ces signaux ont des propriétés statistiques proches de celles des bruits blancs gaussiens et sont faciles à générer.

Le but des expériences était donc de montrer que, le réacteur étant excité par un signal de réactivité $\Delta k(t)$ défini par la relation :

$$\begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - E\, u(t) \\ x(t) \quad : \text{signal pseudo-aléatoire ternaire} \\ E \quad : \text{constante de valeur telle que la valeur moyenne de la puissance soit constante} \end{cases}$$

le noyau du premier ordre des équations de la cinétique est proportionnel à la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre le signal pseudo-aléatoire ternaire x(t) et les variations relatives de la puissance y(t) engendrées par le signal de réactivité $\Delta k(t)$, conformément à la relation établie par R. Hooper :

$$\begin{cases} h_1(\sigma) = \dfrac{3^m - 1}{2x3^{m-1}\ B^2\ \Delta t}\, \Phi^{(1)}_{yx}(\sigma) \\ \left.\begin{array}{l} B \quad : \text{amplitude} \\ \Delta t \quad : \text{incrément temporel} \\ m \quad : \text{nombre des coefficients} \end{array}\right\} \text{du signal pseudo-aléatoire ternaire} \end{cases}$$

Le calcul préliminaire de la valeur à attribuer à la constante E étant impossible, cette valeur a été déterminée expérimentalement par une méthode de divergence. Cette valeur une fois mesurée, il a été procédé à plusieurs expériences dont les résultats n'ont pas donné satisfaction. En effet, le dépouillement de ces expériences montra, que d'une part, la valeur moyenne de la puissance ne restait pas constante, et d'autre part les fonctions d'intercorrélation étaient inexploitables. Cet échec peut être imputé en partie à l'imprécision de la mesure de la valeur de E, celle-ci étant faible, de l'ordre d'une dizaine de pcm; cette imprécision était inévitable du fait que le dispositif modulateur de réactivité utilisé ne permet pas de définir la réactivité avec une erreur inférieure au pcm, l'amplitude du signal de réactivité étant de 80 pcm. Par ailleurs, le bruit naturel qui entache le signal de puissance a considérablement contribué à fausser le calcul des fonctions d'intercorrélation.

Ces expériences ne nous permettent donc pas de conclure quant à la validité de la méthode de mesure envisagée. C'est pourquoi, nous avons eu recours à des calculs numériques en vue de lever les indéterminations dues à la méthode expérimentale. Dans ce but, nous avons élaboré un programme numérique qui permet le calcul de la réponse en puissance du réacteur CABRI à un signal de réactivité tel que celui défini ci-dessus. Les valeurs des variations relatives de la puissance sont ensuite intercorrélées au moyen d'un programme numérique analogue à celui utilisé lors du dépouillement des expériences.

De même que pour les expériences, nous avons dû déterminer la valeur de E telle que la valeur moyenne de la puissance reste constante. Cette détermination a été effectuée au moyen des deux programmes numériques et par itérations successives. Le processus itératif utilisé suppose que la valeur de E est exprimée par la relation :

$$E = \Phi_{yx}^{(1)}(o)$$

qui est démontrée lorsque le signal de réactivité est un bruit blanc gaussien $[E = \Phi_{yx}^{(1)}(o) = \frac{A}{\Lambda}]$. Entrepris dans quatre cas — deux valeurs de l'incrément temporel Δt et deux séries de valeurs initiales du signal pseudo-aléatoire ternaire — les calculs ont montré que le processus itératif est assez rapidement convergent (quatre à cinq itérations). Les quatre valeurs de E ainsi déterminées sont identiques à quelques pour-cents près, mais sont inférieures aux valeurs déterminées expérimentalement. Les valeurs moyennes des réponses en puissance correspondantes sont constantes à quelques pour-cents près.

D'autre part, à chaque itération, les valeurs de la fonction d'intercorrélation $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ ont été calculées de façon à mettre en évidence l'influence de la valeur attribuée à E. La comparaison des courbes $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ obtenues pour chaque cas fait apparaître que ces courbes sont entachées d'un bruit dont l'amplitude, très importante à la première itération, diminue au fur et à mesure que le processus itératif progresse. Cette dernière remarque justifie en partie les anomalies rencontrées lors du dépouillement des expériences puisque, lors de ces expériences, la valeur de E était déterminée avec une précision insuffisante. Bien qu'après quelques itérations, les courbes obtenues soient pratiquement lisses, les fonctions d'intercorrélation $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ calculées ne sont pas proportionnelles au noyau du premier ordre des équations de la cinétique conformément à la relation éta-

blie par R. Hooper. En effet, les valeurs de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ ainsi déterminées sont inférieures de 20 à 30 % aux valeurs théoriques. En raison de l'importance de cette erreur et des différentes anomalies précédemment constatées, il apparaît que les signaux pseudo-aléatoires ternaires ne sont pas convenables pour mesurer le noyau du premier ordre des équations de la cinétique.

En conséquence, cette mesure doit s'effectuer conformément à la méthode exposée dans la deuxième partie. Cette méthode suppose que le réacteur soit excité par un signal de réactivité tel que :

$$\begin{cases} \Delta k(t) = w(t) - E\, u(t) \\ E = \dfrac{A}{\Lambda} \end{cases}$$

x(t) étant un bruit blanc gaussien de densité spectrale A et Λ le temps de vie moyen des neutrons.

CONCLUSION

Nous avons démontré que, les noyaux de Volterra des équations de la cinétique n'étant pas des fonctions de carré sommable, la théorie de Wiener n'était pas applicable. Ces noyaux de Volterra peuvent être mesurés au moyen d'une méthode analogue, le signal de réactivité étant alors la somme d'un bruit blanc gaussien et d'un échelon négatif de réactivité.

L'application expérimentale de cette méthode présente des difficultés identiques à celles rencontrées lors des expériences réalisées avec les signaux pseudo-aléatoires ternaires, notamment en ce qui concerne la précision avec laquelle le dispositif expérimental définit la valeur E de l'échelon négatif de réactivité. De plus, le dispositif expérimental doit générer un signal de réactivité x(t) qui suit un bruit blanc gaussien, ce qui est pratiquement impossible en raison de la bande passante limitée du modulateur de réactivité. Il s'ensuit nécessairement que la valeur E n'est pas exactement $\frac{A}{\Lambda}$, rapport de la densité spectrale A du bruit blanc gaussien et du temps de vie moyen des neutrons Λ . Il y a donc lieu de déterminer expérimentalement la valeur de E au moyen de la méthode d'itérations successives définie lors de l'interprétation numérique des expériences. La mesure directe de Λ étant par ailleurs impossible, cette détermination est de toute façon inévitable.

Pour que la mesure du noyau du premier ordre des équations de la cinétique ait une précision acceptable, il est nécessaire que la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre la réponse en puissance et le bruit blanc gaussien soit calculée sur un intervalle de temps aussi long que possible. La longueur de cet intervalle de temps peut être néanmoins réduit du fait que le signal de réactivité x(t) est un bruit blanc gaussien filtré.

Il apparaît dès lors que de nombreux problèmes sont posés par l'application directe de la méthode de mesure que nous avons proposée. Compte tenu de l'expérience que nous avons acquise, certains problèmes peuvent être résolus a priori. Par exemple, il est possible d'obtenir une meilleure définition du signal de réactivité $\Delta k(t)$ en utilisant deux modulateurs de réactivité spécialisés. Le bruit blanc gaussien x(t) pourrait être produit par un modulateur à grande efficacité créant des perturbations de réactivité rapides et de grande amplitude, alors que l'échelon de réactivité Eu(t) serait produit par un second modulateur à efficacité réduite mais créant avec précision des perturbations de réactivité de faible amplitude.

Il n'en reste pas moins que l'exploitation de notre méthode s'avère difficile. C'est pourquoi, dans le cas éventuel où notre étude serait poursuivie, il conviendrait de procéder à une étude sur calculateur analogique. En effet, les calculateurs analogiques actuels permettent une simulation précise des processus et offrent l'avantage de

pouvoir être connectés aux appareils utilisés sur le processus réel, familiarisant ainsi l'expérimentateur avec l'expérience qu'il veut entreprendre. Par ailleurs, le câblage du problème une fois effectué, l'expérimentateur peut facilement faire varier les paramètres dont il veut étudier l'influence sans pour autant mobiliser toute une équipe attachée au fonctionnement d'une installation telle qu'un réacteur nucléaire. La simulation du processus, équations de la cinétique et asservissements de position des modulateurs de réactivité, ne pose pas de problème particulier. Le bruit blanc gaussien peut être produit par un générateur utilisable pour les expériences en pile, de même que les variations relatives de la puissance peuvent être mesurées au moyen d'un ensemble de mesures différentielles de la puissance.

Pour être concluante, l'étude analogique doit être effectuée en deux stades. Tout d'abord, il convient de mettre en évidence l'influence des différents paramètres (bande passante du modulateur, temps de calcul de la fonction d'intercorrélation, densité spectrale A du bruit blanc gaussien, et valeur Λ du temps de vie moyen des neutrons) sur la valeur de E telle que la valeur moyenne de la réponse en puissance soit constante. Pour déterminer cette valeur de E, il suffit de calculer la valeur de l'origine, $\Phi_{yx}^{(1)}(o)$, de la fonction d'intercorrélation du premier ordre et de procéder par itérations successives. Le calcul de $\Phi_{yx}^{(1)}(o)$ ainsi que de la densité spectrale A peut s'effectuer aisément au moyen du calculateur analogique. Cette étude préliminaire doit aboutir à la définition des relations qui lient la valeur de E aux paramètres énumérés ci-dessus. Dans le cas où cette valeur de E est très proche de la valeur du rapport $\frac{A}{\Lambda}$, il est certain que le noyau du premier ordre des équations de la cinétique peut être mesuré avec précision.

En second lieu, il convient de mesurer la fonction d'intercorrélation du premier ordre entre les variations relatives de la puissance et le bruit blanc gaussien afin de vérifier que le noyau du premier ordre des équations de la cinétique peut être ainsi mesuré avec précision. Cette mesure peut être effectuée en temps réel au moyen d'un multicorrélateur, ce qui est préférable à un calcul différé par programme numérique. L'étude analogique doit donc permettre de conclure quant à la validité expérimentale de la méthode que nous avons préconisée. D'autre part, elle permet de prédéterminer la bande passante du modulateur de réactivité ainsi que le temps minimum nécessaire à chaque expérience. C'est pourquoi, une étude analogique s'avère indispensable avant que des expériences en pile soient entreprises.

En résumé, nous proposons une méthode générale solidement étayée sur le plan théorique. Bien que l'application expérimentale de cette méthode ait échoué, celle-ci nous a permis de faire avancer le problème. En effet, l'interprétation numérique de nos expériences a montré, d'une part que les signaux pseudo-aléatoires ternaires ne pouvaient pas être utilisés en remplacement du bruit blanc gaussien, et d'autre part qu'une méthode d'itérations successives permettait de déterminer l'amplitude E de l'échelon négatif de réactivité. La détermination précise de E est indispensable à l'application expérimentale de notre méthode et, par ailleurs, peut conduire à une mesure directe du temps de vie moyen des neutrons. C'est pourquoi, une étude ultérieure présenterait l'intérêt de prouver le bien fondé de notre méthode et en même temps pourrait aboutir à la mesure directe du temps de vie moyen des neutrons. Aussi, nous estimons qu'une étude analogique préliminaire à toute expérience permettrait de définir complètement le processus expérimental et garantirait ainsi le plein succès des expériences.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. VOLTERRA : "Theory of Functionnals and Integro-Differential Equations" [Dover 59].

[2] N. WIENER : "Non-Linear Problems in Random Theory" [Wiley 58].

[3] N. WIENER : "Response of a Non-Linear Device to Noise" [V. 165 - April 1942].

[4] M. SCHETZEN & Y.W. LEE : "Measurement of the Kernels of a Non-Linear System by Cross-correlation" [RLEQPR - January 61].

[5] C. ARCHAMBAULT : "Asservissement de position d'une barre de contrôle et d'un modulateur de réactivité" [Note CEA-N-1162].

[6] R. HOOPER : "Test Signal for a Class of Non-Linear Systems" [MIT - February 66].

[7] G. KEEPIN : "Physics of Nuclear Kinetics" [Addison Wesley].

[8] C. COUDERT : Thèse de Doctorat d'Etat (Faculté des Sciences de Marseille - Juillet 69).

[9] F. LE BERRE : "Interprétation d'excursions de puissance dans un réacteur à eau [Note CEA-N-1181].

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE I : CALCUL DE LA RELATION ENTRE NOYAU DE VOLTERRA ET NOYAUX DE WIENER

ANNEXE II : CALCUL DE LA RELATION ENTRE NOYAU DE WIENER ET NOYAUX DE VOLTERRA

ANNEXE III : CALCUL DE LA SORTIE D'UN SYSTEME CARACTERISE PAR UN SEUL NOYAU, PRODUIT DE RETARDS PURS

ANNEXE IV : CALCUL DES NOYAUX DE WIENER DU PREMIER ET SECOND ORDRE D'UN SYSTEME CARACTERISE PAR SES NOYAUX DE VOLTERRA

IV-a - Fonctions d'autocorrélation d'un bruit blanc gaussien

IV-b - Calcul du noyau de Wiener du premier ordre

IV-c - Calcul du noyau de Wiener du second ordre

ANNEXE V : CALCUL DU NOYAU DE VOLTERRA D'ORDRE k DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

V-a - Calcul du noyau du troisième ordre

V-b - Calcul du noyau d'ordre k

ANNEXE VI : CALCUL DU NOYAU DE WIENER DU PREMIER ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

VI-a - Calcul des noyaux h_{1+2i} ($\tau_1, \mu_1, \mu_1, \ldots \mu_i, \mu_i$)

VI-b - Calcul de la somme d'intégrales

VI-c - Simplification de l'écriture du noyau $k_1(\tau)$

ANNEXE VII : CALCUL DU NOYAU DE WIENER DU SECOND ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

VII-a- Calcul des noyaux h_{2+2i} ($\tau_1, \tau_2, \mu_1, \mu_1 \ldots \mu_i, \mu_i$)

VII-b- Calcul de la somme d'intégrales

VII-c- Simplification de l'écriture du noyau $k_2(\tau_1, \tau_2)$

ANNEXE VIII : CALCUL DE LA VALEUR MOYENNE DE LA PUISSANCE RELATIVE

ANNEXE IX : CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU SECOND ORDRE ENTRE LES VARIATIONS RELATIVES DE PUISSANCE ET LE BRUIT BLANC GAUSSIEN

ANNEXE X : CALCULS RELATIFS A LA FONCTION D'INTERCORRELATION D'ORDRE QUELCONQUE ENTRE LES VARIATIONS RELATIVES DE LA PUISSANCE ET LE BRUIT BLANC GAUSSIEN

ANNEXE XI : RELATION ENTRE LES NOYAUX DE VOLTERRA h_{n+1} et h_n DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

ANNEXE XII : CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU PREMIER ORDRE ENTRE UN SIGNAL PSEUDO-ALEATOIRE TERNAIRE ET LA REPONSE D'UN SYSTEME LINEAIRE A CE SIGNAL

ANNEXE XIII : CALCUL DE L'EXPRESSION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU PREMIER ORDRE AU MOYEN DE DEVELOPPEMENTS EN SERIE DE TAYLOR

ANNEXE XIV : RESULTATS NUMERIQUES

XIV-a - Cas 1
XIV-b - Cas 3
XIV-c - Cas 2
XIV-d - Cas 4
XIV-e - Fonction d'intercorrélation théorique du noyau du premier ordre des équations de la cinétique

- : -

ANNEXE I

CALCUL DE LA RELATION ENTRE NOYAU DE VOLTERRA ET NOYAUX DE WIENER

On identifie la fonctionnelle V_n, qui est une intégrale de convolution de dimension n, avec la somme de toutes les intégrales de convolution de dimension n contenues dans le développement de Wiener. D'après l'expression [I.2.4] des fonctionnelles G_n, ces intégrales sont des termes des fonctionnelles d'ordre supérieur à n et de même parité que n, sauf celle qui constitue le premier terme de G_n :

$$[I.1] \qquad I_o = \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)x(t-\tau_1) \ \ldots \ x(t-\tau_n) \ d\tau_1 \ \ldots \ d\tau_n$$

La première des intégrales issues de fonctionnelles d'ordre supérieur à n et de même parité que n, provient de G_{n+2} :

$$[I.2] \qquad I_1 = \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty k_{n+2}^{(n)} (\tau_1,\ldots,\tau_n)x(t-\tau_1) \ \ldots \ x(t-\tau_n) \ d\tau_1 \ \ldots \ d\tau_n$$

La seconde de ces intégrales provient de la fonctionnelle G_{n+4} :

$$[I.3] \qquad I_2 = \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty k_{n+4}^{(n)} (\tau_1,\ldots,\tau_n)x(t-\tau_1) \ \ldots \ x(t-\tau_n) \ d\tau_1 \ \ldots \ d\tau_n$$

En poursuivant le raisonnement, la $i^{ème}$ intégrale provient de la fonctionnelle G_{n+2i} :

$$[I.4] \qquad I_i = \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty k_{n+2i}^{(n)} (\tau_1,\ldots,\tau_n)x(t-\tau_1) \ \ldots \ x(t-\tau_n) \ d\tau_1 \ \ldots \ d\tau_n$$

Par suite, l'identification de V_n avec la somme des intégrales de convolution de dimension n contenues dans le développement de Wiener conduit à la relation :

$$[I.5] \qquad V_n \ [h_n,x(t)] = \sum_{i=o}^{\infty} I_i$$

En exploitant l'intégrale I_i et la fonctionnelle V_n on obtient la relation :

$$[I.6] \qquad \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n)d\tau_1\ldots d\tau_n = \sum_{i=o}^{\infty} \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty k_{n+2i}^{(n)}(\tau_i,\ldots,\tau_n)$$

$$x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n) \ d\tau_1\ldots d\tau_n$$

Comme le signal x(t) peut être quelconque la relation [I.6] implique l'identité:

$$k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \sum_{i=0}^{\infty} k_{n+2i}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

On peut expliciter cette identité en exprimant les noyaux $k_{n+2i}^{(n)}$ en fonction des noyaux de Wiener k_{n+2i} :

— pour i = 0 $\quad k_n^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n) = k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$

— pour i = 1 $\quad k_{n+2}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n) = -3\, C_{n+2}^2\, A \int_0^{\infty} k_{n+2}(\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu,\mu)\, d\mu$

— pour i = 2 $\quad k_{n+4}^{(n)}(\tau_1,\ldots,\tau_n) = +15\, C_{n+4}^4\, A^2 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k_{n+4}(\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$

— pour i quelconque

$$k_{n+2i}^{(n)}(\tau_1,..,\tau_n) = (-1)^i[1.3.5\ldots(2i-1)]C_{n+2i}^{2i}\, A^i \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} k_{n+2i}(\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i$$

Par suite, la relation [I.7] devient :

[I.8] $\quad h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) + \sum_{i=1}^{\infty}$ [illegible] $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k_{n+2i}$

$(\tau_1,\ldots,\tau_n,$ [illegible] $,\ldots,\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i$

ANNEXE II

CALCUL DE LA RELATION ENTRE NOYAU DE WIENER ET NOYAUX DE VOLTERRA

Pour mener à bien le calcul, on suppose que le développement de Volterra de y(t) est limité à l'ordre m, c'est-à-dire que tous les noyaux de Volterra du système qui sont d'un ordre supérieur à m sont supposés nuls :

$$[II.1] \qquad y(t) = h_o + \sum_{n=1}^{m} V_n\,[h_n, x(t)]$$

Par suite le développement de Wiener de y(t) est aussi limité à l'ordre m et tous les noyaux de Wiener d'ordre supérieur à m sont nuls. Comme la relation qui lie un noyau de Volterra aux noyaux de Wiener s'écrit selon [I.3.3] :

$$[II.2] \qquad h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = \sum_{i=o}^{\infty} k^{(n)}_{n+2i}(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

la limitation du développement impose la condition :

$$[II.3] \qquad n+2i \leqslant m$$

puisque tous les noyaux k_n d'ordre n supérieur à m sont nuls. L'indice i étant entier, cet indice doit être tel que :

$$[II.4] \qquad \begin{cases} i \leqslant \left[\frac{m-n}{2}\right] \\ \left[\frac{m-n}{2}\right] = \text{partie entière de } \frac{m-n}{2} \end{cases}$$

En explicitant les noyaux $k^{(n)}_{n+2i}$ en fonction des noyaux k_{n+2i}, la relation [II.2] s'écrit donc :

$$[II.5] \qquad h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) + \sum_{i=1}^{\left[\frac{m-n}{2}\right]} (-1)^i[1.3.5\ldots(2i-1)]\, C^{2i}_{n+2i} \int_o^{\infty}\ldots\int_o^{\infty} k_{n+2i}$$

$$(\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1\ldots\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i$$

A partir de cette relation on cherche la relation qui lie un noyau de Wiener aux noyaux de Volterra en commençant par le noyau d'ordre m et en continuant par les noyaux d'ordre successif décroissant. L'application de la relation [II.5] pour n=m et n=m-1 donne directement :

$$[II.6] \qquad k_m(\tau_1,\ldots,\tau_m) = h_m(\tau_1,\ldots,\tau_m)$$

$$[II.7] \qquad k_{m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-1}) = h_{m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-1})$$

Pour n=m-2, on obtient, en remplaçant k_m par son expression [II.6], la relation suivante :

[II.8] $$k_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-2}) = h_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-2}) + C_m^2\, A \int_0^\infty h_m(\tau_1,\ldots,\tau_{m-2},\mu,\mu)\, d\mu$$

Pour n=m-3, le même raisonnement conduit à la relation :

[II.9] $$k_{m-3}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-3}) = h_{m-3}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-3}) + C_{m-1}^2\, A \int_0^\infty h_{m-1}(\tau_1,\ldots\tau_{m-3},\mu,\mu)\, d\mu$$

Pour n=m-4, la relation [II.5] s'écrit :

[II.10] $$h_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4}) = k_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4}) - C_{m-2}^2\, A \int_0^\infty k_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4},\mu,\mu)\, d\mu + 3\, C_m^4\, A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty k_m(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$$

Dans cette relation on remplace k_m par son expression [II.6] et k_{m-2} par son expression [II.8] :

[II.11] $$h_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4}) = k_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4}) - C_{m-2}^2\, A \int_0^\infty h_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4},\mu,\mu)\, d\mu + \left[3C_m^4 - C_{m-2}^2\, C_m^2\right] A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty h_m(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$$

On exprime le produit $C_{m-2}^2\, C_m^2$ en fonction de C_m^4 :

[II.12] $$C_{m-2}^2\, C_m^2 = \frac{(m-2)!}{(m-4)!2!} \cdot \frac{m!}{(m-2)!2!} = \frac{m!}{(m-4)!2!2!} = 6\, C_m^4$$

Par suite, l'expression de k_{m-4} est :

[II.13] $$k_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4}) = h_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4}) + C_{m-2}^2\, A \int_0^\infty h_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4},\mu,\mu)\, d\mu + 3\, C_m^4\, A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty h_m(\tau_1,\ldots,\tau_{m-4},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$$

Pour n=m-5, la relation [II.5] s'écrit :

[II.14] $$h_{m-5}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5}) = k_{m-5}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5}) - C_{m-3}^2\, A \int_0^\infty k_{m-3}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5},\mu,\mu)\, d\mu + 3\, C_{m-1}^4\, A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty k_{m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$$

Dans cette relation on remplace k_{m-3} et k_{m-1} par leurs expressions respectives [II.7] et [II.9] :

$$[II.15] \quad h_{m-5}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5}) = h_{m-5}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5}) - C^2_{m-3}\, A \int_0^\infty h_{m-3}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5},\mu,\mu)\, d\mu + \left[3\, C^4_{m-1} - C^2_{m-3}\cdot C^2_{m-1}\right] A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty h_{m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$$

On exprime le produit $C^2_{m-3} \cdot C^2_{m-1}$ en fonction de C^4_{m-1} :

$$[II.16] \quad C^2_{m-3} \cdot C^2_{m-1} = \frac{(m-3)!}{(m-5)!2!} \cdot \frac{(m-1)!}{(m-3)!2!} = \frac{(m-1)!}{(m-5)!2!2!} = 6\, C^4_{m-1}$$

Par suite, l'expression de k_{m-5} est :

$$[II.17] \quad k_{m-5}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5}) = h_{m-5}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5}) + C^2_{m-3}\, A \int_0^\infty h_{m-3}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5},\mu,\mu)\, d\mu + 3\, C^4_{m-1}\, A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty h_{m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-5},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2$$

Pour n=m-6, la relation [II.5] s'écrit :

$$[II.18] \quad h_{m-6}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6}) = k_{m-6}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6}) - C^2_{m-4}\, A \int_0^\infty k_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu,\mu)d\mu + 3\, C^4_{m-2}\, A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty k_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)d\mu_1\, d\mu_2 - 15\, C^6_m\, A^3 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty k_m(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2,\mu_3,\mu_3)\, d\mu_1\, d\mu_2\, d\mu_3$$

Dans cette relation, on remplace k_{m-4}, k_{m-2} et k_m par leurs expressions respectives [II.13], [II.8] et [II.6] :

$$[II.19] \quad h_{m-6}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6}) = k_{m-6}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6}) - C^2_{m-4}\, A \int_0^\infty h_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu,\mu)\, d\mu + \left[3C^4_{m-2} - C^2_{m-4}\cdot C^2_{m-2}\right] A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty h_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\, d\mu_1\, d\mu_2 + \left[3C^4_{m-2}\, C^2_m - 3C^2_{m-4}\, C^4_m - 15C^6_m\right] A^3 \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty h_m(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2,\mu_3,\mu_3)\, d\mu_1\, d\mu_2\, d\mu_3$$

On exprime le produit $C^2_{m-4} \cdot C^2_{m-2}$ en fonction de C^4_{m-2} :

$$[II.20] \quad C^2_{m-4} \cdot C^2_{m-2} = \frac{(m-4)!}{2!(m-6)!} \cdot \frac{(m-2)!}{2!(m-4)!} = \frac{(m-2)!}{(m-6)!2!2!} = 6\ C^4_{m-2}$$

Par suite on déduit :

$$[II.21] \quad [3\ C^4_{m-2} - C^2_{m-4}\ C^2_{m-2}] = -3\ C^4_{m-2}$$

De même, on exprime les produits $C^2_{m-4}\ C^4_m$ et $C^4_{m-2}\ C^2_m$ en fonction de C^6_m :

$$[II.22] \quad C^2_{m-4} \cdot C^4_m = \frac{(m-4)!}{2!(m-6)!} \cdot \frac{m!}{4!(m-4)!} = \frac{m!}{(m-6)!4!2!} = 15\ C^6_m$$

$$[II.23] \quad C^4_{m-2} \cdot C^2_m = \frac{(m-2)!}{(m-6)!4!} \quad \frac{m!}{(m-2)!2!} \quad \frac{m!}{(m-6)!4!2!} = 15\ C^6_m$$

Par suite on déduit :

$$[II.24] \quad [\,3\ C^4_{m-2} \cdot C^2_m - 3\ C^2_{m-4}\ C^4_m - 15\ C^6_m\,] = -15\ C^6_m$$

L'expression de k_{m-6} est donc :

$$[II.25] \quad k_{m-6}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6}) = h_{m-6}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6}) + C^2_{m-4}\ A \int_0^\infty h_{m-4}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu,\mu)\ d\mu$$

$$+[1.3.]C^4_{m-2}\ A^2 \iint_{00}^{\infty\infty} h_{m-2}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-6},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\,d\mu_1\ d\mu_2$$

$$+[1.3.5]C^6_m\ A^3 \iiint_{000}^{\infty\infty\infty} h_m(\tau_1,\ldots,\tau_{m-1},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2,\mu_3,\mu_3)\ d\mu_1\ d\mu_2\ d\mu_3$$

Un calcul identique effectué pour n=m-7 montre que :

$$[II.26] \quad k_{m-7}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-7}) = h_{m-7}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-7}) + C^2_{m-5}\ A \int_0^\infty h_{m-5}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-7},\mu,\mu)\ d\mu$$

$$+[1.3]\ C^4_{m-3}\ A^2 \iint_{00}^{\infty\infty} h_{m-3}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-7},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)\ d\mu_1\ d\mu_2$$

$$+[1.3.5]\ C^6_{m-1}\ A^3 \iiint_{000}^{\infty\infty\infty} h_{m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{m-7},\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2,\mu_3,\mu_3)\ d\mu_1\ d\mu_2\ d\mu_3$$

On peut généraliser le raisonnement et on obtient l'expression générale du noyau k_n pourvu que n soit inférieur m :

$$[II.27]\quad \begin{cases} k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) + \sum_{i=1}^{[\frac{m-n}{2}]} [1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{n+2i}^{2i}\, A^i \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{n+2i} \\ \qquad (\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i \\ [\frac{m-n}{2}] = \text{portion entière de } \frac{m-n}{2} \\ n < m \end{cases}$$

Comme on peut choisir m de façon quelconque et aussi grand qu'on veut, l'expression [II.27] peut se généraliser aux systèmes dont les noyaux existent jusqu'à l'infini :

$$[II.28]\quad k_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) = h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) + \sum_{i=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2i-1)]\, C_{n+2i}^{2i}\, A^i \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{n+2i} (\tau_1,\ldots,\tau_n,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)\, d\mu_1 \ldots d\mu_i$$

ANNEXE III

CALCUL DE LA SORTIE D'UN SYSTEME CARACTERISE PAR UN SEUL NOYAU, PRODUIT DE RETARDS PURS

D'après [II.1.2] et [II.1.7], la sortie z(t) d'un tel système est définie par les relations :

$$[III.1]\quad \begin{cases} z(t) = G_m\,[\ell_m, A, x(t)] \\ \ell_m(\tau_1, \ldots, \tau_m) = \delta(\tau_1 - \sigma_1) \ldots \delta(\tau_m - \sigma_m) \\ \delta(\tau) : \text{fonction de Dirac} \end{cases}$$

On explicite la fonctionnelle G_m :

$$[III.2]\quad \begin{cases} z(t) = G_m\,[\ell_m, A, x(t)] = \displaystyle\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \ell_m^*(\tau_1, \ldots, \tau_m) x(t-\tau_1) \ldots x(t-\tau_m)\, d\tau_1 \ldots d\tau_m \\ \qquad + \displaystyle\sum_{\upsilon=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \ell_m^{(m-2\upsilon)*}(\tau_1, \ldots, \tau_{m-2\upsilon}, \mu_1, \mu_1, \ldots, \mu_\upsilon, \mu_\upsilon)\, d\mu_1 \ldots d\mu_\upsilon \\ \ell_m^{(m-2\upsilon)*} = a_{m,\upsilon}\, A^\upsilon \displaystyle\int_0^\infty \ldots \int_0^\infty [\delta(\tau_1 - \sigma_1) \ldots \delta(\tau_{m-2\upsilon} - \sigma_{m-2\upsilon}) \delta(\mu_1 - \sigma_{m-2\upsilon+1}) \delta(\mu_1 - \sigma_{m-2\upsilon+2}) \ldots \\ \qquad \ldots \delta(\mu_\upsilon - \sigma_{m-1}) \delta(\mu_\upsilon - \sigma_m)]^*\, d\mu_1 \ldots d\mu_\upsilon \end{cases}$$

Le signe * signifie que la fonction à laquelle il est attribué est symétrisée.

Si on choisit les retards σ de telle sorte qu'ils soient tous différents entre eux, les noyaux $\ell_m^{(m-2\upsilon)*}$ sont tous nuls car :

$$[III.3]\quad \int_0^\infty \delta(\mu - \sigma_i)\delta(\mu - \sigma_j)\, d\mu = 0 \qquad \text{si} \quad \sigma_i \neq \sigma_j$$

Il s'ensuit que la fonctionnelle G_m se réduit à un seul terme, d'où :

$$[III.4]\quad z(t) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \ell_m^*(\tau_1, \ldots, \tau_m) x(t-\tau_1) \ldots x(t-\tau_m)\, d\tau_1 \ldots d\tau_m$$

La relation [III.4] peut s'écrire aussi :

$$[III.5]\quad z(t) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \ell_m(\tau_1, \ldots, \tau_m) x(t-\tau_1) \ldots x(t-\tau_m)\, d\tau_1 \ldots d\tau_m$$

En exprimant ℓ_m selon [III.1], le second membre de cette relation s'intègre immédiatement et on obtient :

[III.6] $$\begin{cases} z(t) = x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2) \ \ldots \ x(t-\sigma_m) \\ \sigma_i \neq \sigma_j \end{cases}$$

- : -

ANNEXE IV

CALCUL DES NOYAUX DE WIENER DU PREMIER ET SECOND ORDRE D'UN SYSTEME CARACTERISE PAR SES NOYAUX DE VOLTERRA

a) - Fonctions d'autocorrélation d'un bruit blanc gaussien :

Soit x(t) un bruit blanc gaussien de densité spectrale A. Pour un tel signal, la valeur moyenne ainsi que toutes les fonctions d'autocorrélation d'ordre pair sont nulles :

[IV.a-1] $\Phi_{xx}^{(2k)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_m) = 0$

Les fonctions d'autocorrélation d'ordre impair sont définies par la relation :

[IV.a-2] $\Phi_{xx}^{(2k+1)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{2k+1}) = A^{(k+1)}\ [\delta(\sigma_1)\delta(\sigma_3-\sigma_2)\delta(\sigma_5-\sigma_4)\ldots\delta(\sigma_{2k+1}-\sigma_{2k})]^*$

$\delta(\sigma)$ = fonction de Dirac

où le signe $*$ signifie qu'on effectue la somme des produits de (k+1) fonctions de Dirac tels que celui entre crochets, ces fonctions de Dirac dépendant de la différence entre deux retards σ_i et σ_j, et les couples σ_i, σ_j étant tous d'indices différents entre eux. Cette somme comprend donc $[1.3.5\ldots(2k+1)]$ produits.

Les premières fonctions d'autocorrélation sont :

[IV.a-3] $\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma) = A\ \delta(\sigma)$

[IV.a-4] $\Phi_{xx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = 0$

[IV.a-5] $\Phi_{xx}^{(3)}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = A^2\ [\delta(\sigma_1)\delta(\sigma_3-\sigma_2) + \delta(\sigma_2)\delta(\sigma_3-\sigma_1) + \delta(\sigma_3)\delta(\sigma_2-\sigma_1)]$

[IV.a-6] $\Phi_{xx}^{(4)}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4) = 0$

[IV.a-7] $\Phi_{xx}^{(5)}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4,\sigma_5) = A^3\ [\delta(\sigma_1)\delta(\sigma_3-\sigma_2)\delta(\sigma_5-\sigma_4) + 14 \text{ termes similaires}]$

b) - Calcul du noyau de Wiener du premier ordre

On exprime $\Phi_{yx}^{(1)}$ à partir de la relation [II.2.2] :

[IV.b-1] $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = h_o\ \overline{x(t-\sigma)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_o^{\infty}\ldots\int_o^{\infty} h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\ \overline{x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n)x(t-\sigma)}\ d\tau_1\ldots d\tau_n$

En effectuant le changement de variable $t-\sigma=\lambda$, on fait apparaître les fonctions d'autocorrélation de $x(\lambda)$:

$$[IV.b-2] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = h_o\,\overline{x(\lambda)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_o^{\infty}\!\!\cdots\!\int_o^{\infty} h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\ \Phi_{xx}^{(n)}(\sigma-\tau_1,\sigma-\tau_2\ldots\sigma-\tau_n)\ d\tau_1\ldots d\tau_n$$

Comme la valeur moyenne et les fonctions d'autocorrélation d'ordre pair de $x(\lambda)$ sont nulles, le développement de $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ devient :

$$[IV.b-3] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \sum_{k=o}^{\infty} \int_o^{\infty}\!\!\cdots\!\int_o^{\infty} h_{2k+1}(\tau_1,\ldots,\tau_{2k+1})\ \Phi_{xx}^{(2k+1)}(\sigma-\tau_1,\ldots,\sigma-\tau_{2k+1})\ d\tau_1\ldots d\tau_{2k+1}$$

On calcule ensuite chaque terme de ce développement en explicitant les fonctions d'autocorrélation de $x(\lambda)$; le terme d'ordre 1 est :

$$[IV.b-4] \quad \int_o^{\infty} h_1(\tau)\ \Phi_{xx}(\sigma-\tau)\ d\tau = A \int_o^{\infty} h_1(\tau)\delta(\sigma-\tau)\ d\tau = A\ h_1(\sigma)$$

Le terme d'ordre 3 est :

$$[IV.b-5] \quad \int_o^{\infty}\int_o^{\infty}\int_o^{\infty} h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\ \Phi_{xx}(\sigma-\tau_1,\sigma-\tau_2,\sigma-\tau_3)d\tau = A^2 \int_{ooo}^{\infty\infty\infty} h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\ \Big[\delta(\sigma-\tau_1)\ \delta(\tau_2-\tau_3) + \delta(\sigma-\tau_2)\delta(\tau_1-\tau_3)+\delta(\sigma-\tau_3)\ \delta(\tau_1-\tau_2)\Big]\ d\tau_1\ d\tau_2\ d\tau_3$$

$$[IV.b-6] \quad \text{soit}\ \ A^2\left[\int_o^{\infty} h_3(\sigma,\tau_2,\tau_2)\ d\tau_2 + \int_o^{\infty} h_3(\tau_1,\sigma,\tau_1)d\tau_1 + \int_o^{\infty} h_3(\tau_1,\tau_1,\sigma)\ d\tau_1\right]$$

Comme on peut toujours considérer que les noyaux de Volterra sont symétriques, il s'ensuit que le terme d'ordre 3 est :

$$[IV.b-7] \quad 3\ A^2 \int_o^{\infty} h_3(\sigma,\mu,\mu)\ d\mu$$

On peut généraliser le calcul pour le terme d'ordre 2k+1 :

$$[IV.b-8] \quad \int_o^{\infty}\!\!\cdots\int_o^{\infty} h_{2k+1}(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_{2k+1})\ \Phi_{xx}^{(2k+1)}(\sigma-\tau_1,\ldots,\sigma-\tau_{2k+1})\ d\tau_1\ \ldots\ d\tau_{2k+1} =$$

$$A^{(k+1)} \int_o^{\infty}\!\!\cdots\!\int_o^{\infty} h_{2k+1}(\tau_1,\ldots,\tau_{2k+1})\ \left[\delta(\sigma-\tau_1)\delta(\tau_3-\tau_2)\ldots\delta(\tau_{2k+1}-\tau_{2k})\right]^*\ d\tau_1\ldots d\tau_{2k+1}$$

$$[IV.b-9] \quad \text{soit}\ \ A^{(k+1)} \int_o^{\infty}\!\!\cdots\!\int_o^{\infty} \left[h_{2k+1}(\sigma,\tau_3,\tau_3,\ldots,\tau_{2k+1},\tau_{2k+1})\ d\tau_3\ d\tau_5\ \ldots\ d\tau_{2k+1}\right]^*$$

Le noyau h_{2k+1} étant symétrique il s'ensuit que le terme d'ordre 2k+1 est :

$$[IV.b\text{-}10] \quad [1.3.5\ldots(2k+1)]\, A^{(k+1)} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+1}(\sigma,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_k,\mu_k)\, d\mu_1 \ldots d\mu_k$$

On déduit alors que la fonction d'intercorrélation est :

$$[IV.b\text{-}11] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = A\, h_1(\sigma) + \sum_{k=1}^{\infty} A^{(k+1)}\, [1.3\ldots(2k+1)] \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+1}(\sigma,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_k,\mu_k)\, d\mu_1 \ldots d\mu_k$$

Comme d'après la relation [II.1.11], le noyau $k_1(\sigma)$ a pour expression :

$$[IV.b\text{-}12] \quad k_1(\sigma) = \frac{1}{A}\, \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$$

on déduit immédiatement la relation qui lie le noyau de Wiener du premier ordre aux noyaux de Volterra :

$$[IV.b\text{-}13] \quad k_1(\sigma) = h_1(\sigma) + \sum_{k=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2k+1)]\, A^k \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+1}(\sigma,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_k,\mu_k)\, d\mu_1 \ldots d\mu_k$$

Comme on peut écrire :

$$[IV.b\text{-}14] \quad [1.3.5\ldots(2k+1)] = [1.3.5\ldots(2k-1)](2k+1) = [1.3.5\ldots(2k-1)]\, C_{2k+1}^{2k}$$

la relation [IV.B-14] s'écrit :

$$[IV.b\text{-}15] \quad k_1(\sigma) = h_1(\sigma) + \sum_{k=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2k-1)]\, C_{2k+1}^{2k}\, A^k \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+1}(\sigma,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_k,\mu_k)\, d\mu_1 \ldots d\mu_k$$

c) - <u>Calcul du noyau de Wiener du second ordre</u>

Comme pour le noyau du premier ordre, on exprime $\Phi_{yx}^{(2)}$ à partir de la relation [II.2.2] :

$$[IV.c\text{-}1] \quad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma_1,\sigma_2) = h_o\, \overline{x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\, \overline{x(t-\tau_1)\ldots x(t-\tau_n)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)}\, d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

En effectuant le changement de variable $t-\sigma_1 = \lambda$, on fait apparaître les fonctions d'autocorrélation de $x(\lambda)$:

$$[IV.c\text{-}2] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = h_o\, \Phi_{xx}^{(1)}(\sigma_1-\sigma_2) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\, \Phi_{xx}^{(n+1)}(\sigma_1-\sigma_2,\sigma_1-\tau_1,\ldots \ldots\sigma_1-\tau_n)\, d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

Les fonctions d'autocorrélation d'ordre pair de $x(\lambda)$ étant nulles, le développement de $\Phi_{yx}^{(2)}$ devient :

$$[IV.c\text{-}3] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = h_o\,\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma_1-\sigma_2) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_o^\infty\!\!\cdots\!\int_o^\infty h_{2k}(\tau_1,\ldots,\tau_{2k})\,\Phi_{xx}^{(2k+1)}(\sigma_1-\sigma_2,\sigma_1-\tau_1,\ldots\sigma_1-\tau_{2k})\,d\tau_1\ \ldots\ d\tau_{2k}$$

On calcule ensuite les termes de ce développement en explicitant les fonctions d'autocorrélation de $x(\lambda)$. Le terme d'ordre 0 est :

$$[IV.c\text{-}4] \quad h_o\,\Phi_{xx}^{(o)}(\sigma_1-\sigma_2) = A\,h_o\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) = 0 \quad \text{si on choisit } \sigma_1 \neq \sigma_2$$

On considèrera par la suite que les retards σ_1 et σ_2 sont choisis différents. Le terme d'ordre 2 est :

$$[IV.c\text{-}5] \quad \int_o^\infty\int_o^\infty h_2(\tau_1,\tau_2)\,\Phi_{xx}^{(3)}(\sigma_1-\sigma_2,\sigma_1-\tau_1,\sigma_1-\tau_2)d\tau_1\ d\tau_2 = A^2\int_o^\infty\int_o^\infty h_2(\tau_1,\tau_2)\big[\delta(\sigma_1-\sigma_2)\,\delta(\tau_2-\tau_1) + \delta(\sigma_1-\tau_1)\delta(\sigma_2-\tau_2) + \delta(\sigma_1-\tau_2)\delta(\sigma_2-\tau_1)\big]\,d\tau_1\ d\tau_2$$

$$[IV.c\text{-}6] \quad \text{soit } A^2\big[h_2(\sigma_1,\sigma_2) + h_2(\sigma_2,\sigma_1)\big]$$

Du fait de la symétrie des noyaux de Volterra le terme d'ordre 2 est :

$$[IV.c\text{-}7] \quad 2\,A^2\,h_2(\sigma_1,\sigma_2)$$

On généralise le calcul pour le terme d'ordre (2k+2) :

$$[IV.c\text{-}8] \quad \int_o^\infty\!\!\cdots\!\int_o^\infty h_{2k+2}(\tau_1,\ldots,\tau_{2k+2})\,\Phi_{xx}^{(2k+3)}(\sigma_1-\sigma_2,\sigma_1-\tau_1,\ldots,\sigma_1-\tau_{2k+2})\,d\tau_1\ldots d\tau_{2k+2}$$

$$= A^{(k+2)}\int_o^\infty\!\!\cdots\!\int_o^\infty h_{2k+2}(\tau_1,\ldots,\tau_{2k+2})\,\big[\delta(\sigma_1-\sigma_2)\delta(\tau_2-\tau_1)\ldots\delta(\tau_{2k+2}-\tau_{2k+1})\big]^*\,d\tau_1\ \ldots\ d\tau_{2k+2}$$

La fonction $[\ ]^*$ comprend le nombre $[1.3.5\ldots(2k+3)]$ de produits de (k+2) fonctions de Dirac dont $[1.3.5\ldots(2k+1)]$ sont de la forme $[\delta(\sigma_1-\sigma_2)\delta(\tau_i-\tau_j)\ldots\delta(\tau_w-\tau_v)]$ les indices i,j,...,v,w étant différents entre eux et de valeurs choisies parmi 1,2,...,2k+2. La contribution de ces produits est nulle car on a choisi σ_1 et σ_2 différents. Par suite, il reste les produits de la forme : $[\delta(\sigma_1-\tau_i)\delta(\sigma_2-\tau_j)\delta(\tau_k-\tau_\ell)\ \ldots\ \delta(\tau_w-\tau_v)]$ qui sont au nombre de :

$$[IV.c\text{-}9] \quad [1.3.5\ldots(2k+3)] - [1.3.5\ldots(2k+1)] = [1.3.5\ldots2k+1](2k+2)$$
$$= [1.3.5\ldots2k-1](2k+1)(2k+2)$$
$$= [1.3.5\ldots2k-1]\ 2\ C_{2k+2}^{2k}$$

Le terme d'ordre 2k+2 est donc :

$$[1.3.5\ldots(2k-1)]\ C_{2k+2}^{2k}\ A^{k+2} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+2}(\tau_1,\ldots,\tau_{2k+2})\,\delta(\sigma_1-\tau_i)\,\delta(\sigma_2-\tau_j)\,\delta(\tau_k-\tau_\ell) \ldots \delta(\tau_w-\tau_v)\ d\tau_1 \ \ldots\ d\tau_{2k+2}$$

soit :

$$[IV.c\text{-}11]\quad 2[1.3.5\ldots(2k-1)]\ C_{2k+2}^{2k}\ A^{k+2} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+2}(\sigma_1,\sigma_2,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_k,\mu_k)\ d\mu_1 \ldots d\mu_k$$

On déduit alors l'expression générale de $\Phi_{yx}^{(2)}$:

$$[IV.c\text{-}12]\quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = 2\,A^2\left[\, h_2(\sigma_1,\sigma_2) + \sum_{k=1}^{\infty} [1.3\ldots(2k-1)]\ C_{2k+2}^{2k}\ A^k \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+2}(\sigma_1,\sigma_2,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_k,\mu_k)\ d\mu_1\ \ldots\ d\mu_k \right]$$

Comme d'après la relation [II.1.11] le noyau $k_2(\sigma_1,\sigma_2)$ a pour expression :

$$[IV.c\text{-}13]\quad k_2(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{1}{2!\ A^2}\ \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2)$$

on déduit immédiatement que la relation qui lie le noyau de Wiener du second ordre aux noyaux de Volterra est :

$$k_2(\sigma_1,\sigma_2) = h_2(\sigma_1,\sigma_2) + \sum_{k=1}^{\infty} [1.3\ldots(2k-1)]\ C_{2k+2}^{2k}\ A^k \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty h_{2k+2}(\sigma_1,\sigma_2,\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_k,\mu_k)\ d\mu_1\ \ldots\ d\mu_k$$

ANNEXE V

CALCUL DU NOYAU DE VOLTERRA D'ORDRE k DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

V.a - Calcul du noyau du troisième ordre

Dans l'équation [III.2.1], on substitue $\frac{\Delta n}{n_o}(t)$ par sa solution approchée au second ordre $\frac{\Delta n_2}{n_o}(t)$:

$$[V.a.1] \qquad \frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_1}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\,\frac{\Delta n_2}{n_o}(t-\tau)\,\Delta k(t-\tau)\,d\tau$$

On substitue ensuite $\frac{\Delta n_2}{n_o}(t)$ par son expression [III.2.7] :

$$[IV.a.2] \qquad \frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_1}{n_o}(t) + \int_o g(\tau)u(\tau)\,\frac{\Delta n_1}{n_o}(t-\tau)\,\Delta k(t-\tau)\,d\tau + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\Delta k(t-\tau)\left[\int_o^\infty\int_o^\infty g(\lambda_1)\right.$$
$$\left. g(\lambda_2-\lambda_1)u(\lambda_1)u(\lambda_2-\lambda_1)\Delta k(t-\tau-\lambda_1)\Delta k(t-\tau-\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2\right]d\tau$$

Comme il apparaît l'expression [III.2.3] de $\frac{\Delta n_2}{n_o}(t)$ on simplifie l'expression [V.a.2] :

$$[V.a.3] \qquad \frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau \int_o^\infty\int_o^\infty g(\lambda_1)g(\lambda_2-\lambda_1)u(\lambda_1)u(\lambda_2-\lambda_1)\Delta k(t-\tau-\lambda 1)$$
$$\Delta k(t-\tau-\lambda_2)\,d\lambda_1\,d\lambda_2$$

On effectue le changement de variable : $\tau+\lambda_2 = \tau_3 \Longrightarrow \begin{cases} d\tau_3 = d\lambda_2 \\ \lambda_2 = \tau_3-\tau \end{cases}$

$$[V.a.4] \qquad \frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau \int_o^\infty g(\lambda_1)u(\lambda_1)\Delta k(t-\tau-\lambda_1)d\lambda_1 \int_\tau^\infty g(\tau_3-\tau-\lambda_1)$$
$$u(\tau_3-\tau-\lambda_1)\Delta k(t-\tau_3)\,d\tau_3$$

Comme on a :

$g(\tau_3-\tau-\lambda_1)u(\tau_3-\tau-\lambda_1) = 0$ pour $\tau_3 < \tau+\lambda_1$ donc pour $\tau_3 < \tau$, on peut écrire l'expression [V.a.4] sous la forme :

$$[V.a.5] \qquad \frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau \int_o^\infty g(\lambda_1)u(\lambda_1)\Delta k(t-\tau-\lambda_1)d\lambda_1 \int_o^\infty g(\tau_3-\tau-\lambda_1)$$
$$u(\tau_3-\tau-\lambda_1)\Delta k(t-\tau_3)\,d\tau_3$$

On effectue successivement les changements de variables :

$$\tau + \lambda_1 = \tau_2 \Longrightarrow \begin{cases} d\tau_2 = d\lambda_1 \\ \lambda_1 = \tau_2 - \tau \end{cases}$$

$$\tau = \tau_1 \Longrightarrow d\tau_1 = d\tau$$

[V.a.6] $$\frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau_1)u(\tau_1)\Delta k(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{\tau_1}^\infty y(\tau_2-\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\Delta k(t-\tau_2)d\tau_2$$

$$\int_o^\infty g(\tau_3-\tau_2)u(\tau_3-\tau_2)\Delta k(t-\tau_3)d\tau_3$$

Comme on a : $g(\tau_2-\tau_1)u(\tau_2-\tau_1) = 0$ pour $\tau_2 < \tau_1$, on peut écrire l'expression [V.a.6] sous la forme :

[V.a.7] $$\frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_2}{n_o}(t) + \int_o^\infty\int_o^\infty\int_o^\infty g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)g(\tau_3-\tau_2)u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)u(\tau_3-\tau_2)\Delta k(t-\tau_1)$$

$$\Delta k(t-\tau_2)\ \Delta k(t-\tau_3)\ d\tau_1\ d\tau_2\ d\tau_3$$

En exprimant $\frac{\Delta n_3}{n_o}(t)$ selon son expression [III.2.8], la solution approchée à l'ordre troisième est :

[V.a.8] $$\frac{\Delta n_3}{n_o}(t) = \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau + \int_o^\infty\int_o^\infty g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\Delta k(t-\tau_1)\Delta k(t-\tau_2)$$

$$d\tau_1\ d\tau_2 + \int_o^\infty\int_o^\infty\int_o^\infty g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)g(\tau_3-\tau_2)u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)u(\tau_3-\tau_2)\Delta k(t-\tau_1)$$

$$\Delta k(t-\tau_2)\Delta k(t-\tau_3)\ d\tau_1\ d\tau_2\ d\tau_3$$

d'où l'expression du noyau du troisième ordre :

[V.a.9] $$h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)g(\tau_3-\tau_2)u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)u(\tau_3-\tau_2)$$

V.b - Calcul du noyau d'ordre k

Dans l'équation [III.2.1], on substitue $\frac{\Delta n}{n_o}(t)$ par sa solution approchée à l'ordre (k-1) $\frac{\Delta n_{k-1}}{n_o}(t)$:

[V.b.1] $$\frac{\Delta n_k}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_1}{n_o} + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\ \frac{\Delta n_{k-1}}{n_o}(t-\tau)\ \Delta k(t-\tau)\ d\tau$$

Comme le laissent prévoir les expressions [III.2.8] de $\frac{\Delta n_2}{n_o}(t)$, on suppose que l'expression de $\frac{\Delta n_{k-1}}{n_o}(t)$ est un développement de Volterra limité à l'ordre k-1 :

[V.b.2] $$\frac{\Delta n_{k-1}}{n_o}(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \int_o^\infty \cdots \int_o^\infty h_i(\tau_1,\ldots,\tau_i)\Delta k(t-\tau_1)\ldots\Delta k(t-\tau_i)\ d\tau_1\ \ldots\ d\tau_i$$

dont les noyaux sont définis par la relation :

[V.b.3] $$h_i(\tau_1,\ldots,\tau_i) = g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)\ldots g(\tau_i-\tau_{i-1})u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\ldots u(\tau_i-\tau_{i-1})$$

de telle sorte que la relation [V.b.1] peut s'écrire :

[V.b.4] $$\frac{\Delta n_k}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_{k-1}}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau)u(\tau)\Delta k(t-\tau)d\tau \int_o^\infty\!\!\ldots\!\int_o^\infty g(\lambda_1)g(\lambda_2-\lambda_1)\ldots g(\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2})$$
$$u(\lambda_1)u(\lambda_2-\lambda_1)\ldots u(\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2})\Delta k(t-\tau-\lambda_1)\ldots\Delta k(t-\tau-\lambda_{k-1})$$
$$d\lambda_1 \ldots d\lambda_{k-1}$$

On effectue alors les changements de variables suivants :

$$\tau = \tau_1 \implies d\tau = d\tau_1$$
$$\tau+\lambda_1 = \tau_2 \implies \begin{cases} d\lambda_1 = d\tau_2 \\ \lambda_1 = \tau_2-\tau = \tau_2-\tau_1 \end{cases}$$
$$\vdots$$
$$\tau+\lambda_{k-1} = \tau_k \implies \begin{cases} d\lambda_{k-1} = d\tau_k \\ \lambda_{k-1} = \tau_k-\tau = \tau_k-\tau_1 \end{cases}$$

de telle sorte qu'on a :

$$\lambda_1 = \tau_2-\tau_1$$
$$\lambda_2-\lambda_1 = \tau_3-\tau_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_{k-1}-\lambda_{k-2} = \tau_k-\tau_{k-1}$$

[V.b.5] $$\frac{\Delta n_k}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_{k-1}}{n_o}(t) + \int_o^\infty g(\tau_1)u(\tau_1)\Delta k(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{\tau_1}^\infty\!\!\ldots\!\int_{\tau_1}^\infty g(\tau_2-\tau_1)g(\tau_3-\tau_2)\ldots$$
$$\ldots g(\tau_k-\tau_{k-1})u(\tau_2-\tau_1)\ldots u(\tau_k-\tau_{k-1})\Delta k(t-\tau_2)\ldots\Delta k(t-\tau_k)$$
$$d\tau_2 \ldots d\tau_k$$

Comme pour une valeur quelconque de k on a :

$$g(\tau_k-\tau_{k-1})u(\tau_k-\tau_{k-1}) = 0 \qquad \text{pour } \tau_k < \tau_{k-1}$$

soit pour $\tau_k < \tau_1+\lambda_{k-1}$ donc pour $\tau_k < \tau_1$ on peut écrire la relation [V.b.5] sous la forme :

[V.b.6] $$\frac{\Delta n_k}{n_o}(t) = \frac{\Delta n_{k-1}}{n_o}(t) + \int_o^\infty\!\!\ldots\!\int_o^\infty g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)\ldots g(\tau_k-\tau_{k-1})u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\ldots u(\tau_k-\tau_{k-1})$$
$$\Delta k(t-\tau_1) \ldots \Delta k(t-\tau_k)\, d\tau_1 \ldots d\tau_k$$

Par suite la solution approchée à l'ordre k est :

[V.b.7] $$\begin{cases} \dfrac{\Delta n_k}{n_o}(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_o^\infty\!\!\ldots\!\int_o^\infty h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n)\,\Delta k(t-\tau_1)\ldots\Delta k(t-\tau_k)\,d\tau_1 \ldots d\tau_k \\ h_n(\tau_1,\ldots,\tau_k) = g(\tau_1)g(\tau_2-\tau_1)\ldots g(\tau_k-\tau_{k-1})u(\tau_1)u(\tau_2-\tau_1)\ldots u(\tau_k-\tau_{k-1}) \end{cases}$$

- : -

ANNEXE VI

CALCUL DU NOYAU DE WIENER DU PREMIER ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

VI.a - Calcul des noyaux $h_{1+2i}(\tau,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)$

Le premier de ces noyaux est $h_3(\tau,\mu,\mu)$ et son calcul s'effectue à partir de l'expression symétrique de $h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ [cf. IV.1] :

$$[VI.a.1] \quad h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = \frac{1}{3!}\left[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)G(\tau_3-\tau_2)\right]^*$$

en remplaçant l'une des trois variables par τ, et les deux autres par μ.
On obtient alors :

$$[VI.a.2] \quad h_3(\tau,\mu,\mu) = \frac{2}{3!}\,G(o)\left[G(\tau)G(\mu-\tau) + G(\mu)G(\tau-\mu)\right]$$

L'expression de $h_3(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ étant symétrique, celle de $h_3(\tau,\mu,\mu)$ l'est aussi. Comme le fait de permuter deux variables de valeur identique μ ne change pas l'écriture de cette expression, l'expression de $h_3(\tau,\mu,\mu)$ comprend 6 termes égaux deux par deux, d'où le coefficient 2. De plus les deux termes $G(\mu)G(\tau-\mu)G(\mu-\tau)$ n'apparaissent pas dans [VI.a.2] car le produit $u(\mu-\tau)$ est identiquement nul.

En raisonnant de façon identique, $h_5(\tau,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)$ a pour expression :

$$[VI.a.3] \quad h_5(\tau,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2) = \frac{2^2\,G(o)^2}{5!}\Big[G(\tau)\left[G(\mu_1-\tau)G(\mu_2-\mu_1) + G(\mu_2-\tau)G(\mu_1-\mu_2)\right] + G(\mu_1)\left[G(\tau-\mu_1)G(\mu_2-\tau) + G(\tau-\mu_2)G(\mu_2-\mu_1)\right] + G(\mu_2)\left[G(\tau-\mu_2)G(\mu_1-\tau) + G(\tau-\mu_1)G(\mu_1-\mu_2)\right]\Big]$$

Dans cette expression, le coefficient 2^2 vient du fait qu'on peut écrire 4 termes identiques par permutations respectives de μ_1 avec $\mu 1$, de $\mu 2$ avec $\mu 2$. Les termes qui ne sont pas en facteur de $G(o)^2$ comprennent tous des produits tels que $G(\mu_2-\mu_1)G(\mu_1-\mu_2)$, $G(\tau-\mu_1)G(\mu_1-\tau)$ où $G(\tau-\mu_2)G(\mu_2-\tau)$ qui sont tous identiquement nuls. D'autre part on peut simplifier l'expression [VI.a.3] en la désymétrisant et il vient alors en facteur le coefficient 2! qui représente le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les deux variables μ_1 et μ_2 :

$$[VI.a.4] \quad h_5(\tau,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2) = \frac{2^2\cdot 2!}{5!}\,G(o)^2\Big[G(\tau)G(\mu_1-\tau)G(\mu_2-\mu_1) + G(\mu_1)\left[G(\tau-\mu_1)G(\mu_2-\tau) + G(\tau-\mu_2)G(\mu_2-\mu_1)\right]\Big]$$

Un raisonnement identique permet de dégager l'expression générale du noyau $h_{1+2i}(\tau,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)$:

$$[VI.a.5] \quad h_{1+2i}(\tau,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i) = \frac{2^i \cdot i!\ G(o)^i}{(1+2i)!}\Big[G(\tau)G(\mu_1-\tau)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1}) + G(\mu_1)\sum_{k=1}^{i} G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau-\mu_k)G(\mu_{k+1}-\tau) G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\Big]$$

avec $\begin{cases} k-1 \geqslant 1 \\ k+1 \leqslant i \\ k+2 \leqslant i \end{cases}$

Le coefficient intervenant dans cette expression dépend de la $i^{ème}$ puissance de G(o), de 2^i qui représente le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les deux termes des i couples de variables $\mu_1,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i$ sans changer l'ordre de succession des indices, de i! qui est le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les i variables $\mu_1\ldots\mu_i$.

VI.b - Calcul de la somme d'intégrales

D'après [VI.a.5], l'expression [IV.2.4] se décompose en une somme d'intégrales :

$$[VI.b.1] \quad I_o + \sum_{k=1}^{i} I_k$$

où les intégrales I_o et I_k sont définies pour les relations :

$$[VI.b.2] \quad I_o = G(\tau)\int_o^\infty\ldots\int_o^\infty G(\mu_1-\tau)G(\mu_2-\mu_1)\ \ldots\ G(\mu_i-\mu_{i-1})\ d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

$$[VI.b.3] \quad I_k = \int_o^\infty\ldots\int_o^\infty G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau-\mu_k)G(\mu_{k+1}-\tau)G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\ldots \ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\ d\mu_1\ldots d\mu_i$$

La première intégrale I_o se résoud en procédant successivement aux changements de variables suivants :

$$\lambda_1 = \mu_1-\tau \implies \begin{cases} d\lambda_1 = d\mu_1 \\ \mu_1 = \lambda_1+\tau \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \mu_2-\tau \implies \begin{cases} d\lambda_2 = d\mu_2 \\ \mu_2 = \lambda_2+\tau \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i = \mu_i-\tau \implies \begin{cases} d\lambda_i = d\mu_i \\ \mu_i = \lambda_i+\tau \end{cases}$$

de telle sorte que cette intégrale s'écrit :

$$[VI.b.4] \quad I_o = G(\tau)\int_{-\tau}^\infty\int_{-\tau}^\infty G(\lambda_1)G(\lambda_2-\lambda_1)\ \ldots\ G(\lambda_i-\lambda_{i-1})\ d\lambda_1\ \ldots\ d\lambda_i$$

Cette expression fait intervenir une succession d'intégrales de convolution dont la première est :

$$[VI.b.5] \qquad \int_{-\tau}^{\infty} G(\lambda_1)G(\lambda_2-\lambda_1)\, d\lambda_1$$

qui peut s'écrire, en remarquant que $G(\lambda_1) = 0$ pour $\lambda_1 < 0$:

$$[VI.b.6] \qquad \int_{0}^{\infty} G(\lambda_1)G(\lambda_2-\lambda_1)\, d\lambda_1$$

Cette intégrale est une intégrale de convolution ou produit de convolution $G(\lambda_2)*G(\lambda_2)$ qu'on note conventionnellement $G(\lambda_2)^{*(2)}$ de telle sorte que I_o devient :

$$[VI.b.7] \qquad I_o = G(\tau)\int_{-\tau}^{\infty}\int_{-\tau}^{\infty} G(\lambda_2)^{*(2)}\, G(\lambda_3-\lambda_2) \ldots G(\lambda_i-\lambda_{i-1})\, d\lambda_2 \ldots d\lambda_i$$

Du fait des propriétés des produits de convolution, $G(\lambda_2)^{*(2)}$ est nul pour $\lambda_2 < 0$, de telle sorte que, en notant $G(\lambda_i)^{*(i)}$ un produit de convolution de dimension i, cette expression peut s'écrire :

$$[VI.b.8] \qquad I_o = G(\tau)\int_{-\tau}^{\infty} G(\lambda_i)^{*(i)}\, d\lambda_i$$

soit, comme $G(\lambda_i)^{*(i)}$ est nulle pour $\lambda_i < 0$:

$$I_o = G(\tau)\int_{0}^{\infty} G(\lambda)^{*(i)}\, d\lambda$$

Les intégrales I_k (cf. [VI.b.3]) se calculent de façon identique. On effectue successivement les changements de variable suivants :

$$\lambda_{k+1} = \mu_{k+1} - \tau \implies \begin{cases} d\lambda_{k+1} = d\mu_{k+1} \\ \mu_{k+1} = \lambda_{k+1} + \tau \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i = \mu_i - \tau \implies \begin{cases} d\lambda_i = d\mu_i \\ \mu_i = \lambda_i + \tau \end{cases}$$

de telle sorte que ces intégrales ont pour expression :

$$[VI.b.10] \qquad I_k = \int_{\mu_1=o}^{\infty} \ldots \int_{\mu_k=o}^{\infty} \ldots \int_{\lambda_{k+1}=-\tau}^{\infty} \ldots \int_{\lambda_i=-\tau}^{\infty} G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau-\mu_k)G(\lambda_{k+1})$$

$$G(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})\ldots G(\lambda_i-\lambda_{i-1})d\mu_1 \ldots d\mu_k\, d\lambda_{k+1}\ldots d\lambda_i$$

L'intégration par rapport aux variables $\mu_1 \ldots \mu_k$ fait apparaître un produit de convolution de dimension (k+1) de $G(\tau)$ avec elle-même :

$$[VI.b.11] \quad I_k = G(\tau)^{*(k+1)} \int_{-\tau}^{\infty} \int_{-\tau}^{\infty} G(\lambda_{k+1}) G(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1}) \ldots G(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \, d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_i$$

L'intégration par rapport aux variables $\lambda_{k+1} \ldots \lambda_{i-1}$ s'effectue de façon analogue à celle de I_o et on obtient :

$$[VI.b.12] \quad I_k = G(\tau)^{*(k+1)} \int_{o}^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} \, d\lambda$$

Dans le cas où k = i :

$$[VI.b.13] \quad \int_{o}^{\infty} G(\lambda)^{*(o)} \, d\lambda = \int_{o}^{\infty} \delta(\lambda) d\lambda = 1$$

de telle sorte que :

$$[VI.b.14] \quad I_i = G(\tau)^{*(k+1)}$$

D'autre part, comme $G(\lambda)^{*(1)} = G(\lambda)$, alors l'expression [IV.2.4] s'écrit :

$$[VI.b.15] \quad I_o + \sum_{k=1}^{i} I_k = \sum_{k=o}^{i} G(\tau)^{*(k+1)} \int_{o}^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} \, d\lambda$$

Le noyau de Wiener du premier ordre a donc pour expression :

$$[VI.b.16] \quad k_1(\tau) = G(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} A^i \, G(o)^i \sum_{k=o}^{i} G(\tau)^{*(k+1)} \int_{o}^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} \, d\lambda$$

VI.c - Simplification de l'écriture du noyau $k_1(\tau)$

Pour simplifier l'écriture de $k_1(\tau)$, on cherche à mettre son expression sous la forme :

$$[VI.c.1] \quad k_1(\tau) = \sum_{j=o}^{\infty} A^j \, G(o)^j \, G(\tau)^{*(j+1)} \, C_j$$

où C_j est obtenu en groupant tous les termes en facteur $A^j G(o)^j G(\tau)^{*(j+1)}$. Pour cela on impose : $\begin{cases} k = j \\ i \text{ variant de } j \text{ à l'infini :} \end{cases}$

$$[VI.c.2] \quad C_j = \sum_{i=j}^{\infty} A^{(i-j)} \, G(o)^{(i-j)} \int_{o}^{\infty} G(\lambda)^{*(i-j)} \, d\lambda$$

En effectuant le changement d'indice i-j=υ, on obtient :

$$[\text{VI.c.3}] \qquad C_j = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} A^{\upsilon} G(o)^{\upsilon} \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(\upsilon)} \, d\lambda$$

soit en inversant l'ordre des sommations :

$$[\text{VI.c.4}] \qquad C_j = \int_o^{\infty} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} A^{\upsilon} G(o)^{\upsilon} G(\lambda)^{*(\upsilon)} \, d\lambda$$

En notant :

$$[\text{VI.c.5}] \qquad S(\lambda) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} A^{\upsilon} G(o)^{\upsilon} G(\lambda)^{*(\upsilon)}$$

C_j s'écrit simplement :

$$[\text{VI.c.6}] \qquad C_j = \int_o^{\infty} S(\lambda) \, d\lambda$$

Par suite, l'expression [VI.c.1] de $k_1(\tau)$ devient :

$$[\text{VI.c.7}] \qquad k_1(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} A^j G(o)^j G(\tau)^{*(j+1)} \int_o^{\infty} S(\lambda) \, d\lambda$$

Comme C_j est finalement un facteur indépendant de l'indice j, on peut le mettre en facteur de la sommation :

$$[\text{VI.c.8}] \qquad k_1(\tau) = \left[\int_o^{\infty} S(\lambda) d\lambda \right] \sum_{j=0}^{\infty} A^j G(o)^j G(\tau)^{*(j+1)}$$

En faisant apparaître la série $S(\lambda)$, l'expression finale de ce noyau s'écrit alors :

$$[\text{VI.c.9}] \qquad k_1(\tau) = \left[G(\tau) * S(\tau) \right] \int_o^{\infty} S(\lambda) \, d\lambda$$

ANNEXE VII

CALCUL DU NOYAU DE WIENER DU SECOND ORDRE DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

VII.a - Calcul des noyaux $h_{2+2i}(\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)$

Le premier de ces noyaux est $h_4(\tau_1,\tau_2,\mu,\mu)$, et son calcul s'effectue à partir de l'expression symétrique de $h_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)$ [cf. IV.1] :

$$[VII.a.1] \quad h_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4) = \frac{1}{4!}\left[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)G(\tau_3-\tau_2)G(\tau_4-\tau_3)\right]^*$$

en remplaçant les variables τ_3 et τ_4 par μ. On obitent alors :

$$[VII.a.2] \quad h_4(\tau_1,\tau_2,\mu,\mu) = \frac{2}{4!}G(o)\Big[G(\tau_1)\left[G(\tau_2-\tau_1)G(\mu-\tau_2) + G(\mu-\tau_1)G(\tau_2-\mu)\right] + G(\mu)$$
$$G(\tau_1-\mu)G(\tau_2-\tau_1) + G(\mu)G(\tau_2-\mu)G(\tau_1-\tau_2) + G(\tau_2)\left[G(\tau_1-\tau_2)\right.$$
$$\left.G(\mu-\tau_1) + G(\mu-\tau_2)G(\tau_1-\mu)\right]\Big]$$

L'expression de $h_4(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)$ étant symétrique, celle de $h_4(\tau_1,\tau_2,\mu,\mu)$ l'est aussi, et le coefficient 2 vient du fait qu'on peut permuter μ avec μ sans changer l'expression de ce noyau. D'autre part les termes qui ne sont pas en facteur de G(o) n'apparaissent pas dans cette expression car ils sont identiquement nuls à cause de produits de la forme $G(\tau-\mu)G(\mu-\tau)$, soit de la forme $G(\tau_1-\mu)G(\tau_2-\tau_1)$ $G(\mu-\tau_2)$. En effet, dans ce dernier cas, pour que ce produit ne soit pas nul, on doit avoir les conditions suivantes satisfaites :

$$[VII.a.3] \quad \begin{cases} \tau_2 < \mu < \tau_1 \\ \\ \tau_1 < \tau_2 \end{cases}$$

ce qui est impossible. On peut alors désymétriser l'expression [VII.a.2] pour en simplifier l'écriture. Il intervient le coefficient 2 qui correspond au nombre de permutations qu'on peut effectuer sur τ_1 et τ_2 :

$$[VII.a.4] \quad h_4(\tau_1,\tau_2,\mu,\mu) = \frac{2^2}{4!}G(o)\Big[G(\tau_1)\left[G(\tau_2-\tau_1)G(\mu-\tau_2) + G(\mu-\tau_1)G(\tau_2-\mu)\right] + G(\mu)G(\tau_1-\mu)G(\tau_2-\tau_1)\Big]$$

En raisonnant de la même façon que précédemment, l'expression de $h_6(\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2)$ est :

$$[VII.a.5] \quad h_6(\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2) = \frac{2^3\ 2!}{6!}G(o)^2\Big[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)G(\mu_1-\tau_2)G(\mu_2-\mu_1) + G(\tau_1)$$
$$G(\mu_1-\tau_1)\left[G(\tau_2-\mu_1)G(\mu_2-\tau_2)+G(\mu_2-\mu_1)G(\tau_2-\mu_2)\right] +$$
$$G(\mu_1)\left[G(\tau_1-\mu_1)G(\tau_2-\tau_1)G(\mu_2-\tau_2)+G(\mu_2-\mu_1)G(\tau_1-\mu_2)\right.$$
$$\left.G(\tau_2-\tau_1)\right]\Big]$$

Dans cette expression 2! représente le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur μ_1 et μ_2, 2^3 représente le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les couples $\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\mu_2,\mu_2$ sans changer l'ordre de succession des indices sur les variables μ_1 et μ_2.

On généralise ce raisonnement pour un noyau quelconque et on obtient :

$$[VII.a.6] \quad h_{2+2i}(\tau_1,\tau_2,\mu_1,\ldots\mu_i,\mu_i) = \frac{2^{i+1}.i!}{(2+2i)!}\,G(o)^i \Big[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)G(\mu_1-\tau_2)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})$$
$$+ G(\tau_1)G(\mu_1-\tau_1)\sum_{k=1}^{i} G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau_2-\mu_k)G(\mu_{k+1}-\tau_2)\,G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})$$
$$+ G(\mu_1)\sum_{k=1}^{i} G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau_1-\mu_k)G(\tau_2-\tau_1)G(\mu_{k+1}-\tau_2)\,G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\Big]$$

Le coefficient en facteur dans cette expression fait intervenir la $i^{ème}$ puissance de G(o), 2^{i+1} qui est le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les termes des (i+1) couples de variables $\tau_1,\tau_2,\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i$ sans changer l'ordre de succession des indices des variables μ et i! qui est le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les i variables $\mu_1\ldots\mu_i$, (2+2i)! provenant de l'expression symétrique du noyau $h_{2+2i}(\tau_1,\tau_2,\ldots\tau_{2+2i})$.

VII.b - Calcul de la somme d'intégrales

D'après [VII.a.6], l'expression [IV.3.4] se décompose en une somme d'intégrales.

$$[VII.b.1] \quad I_o + \sum_{k=1}^{i} [I_k^1 + I_k^2]$$

où les intégrales I_o, I_k^1 et I_k^2 sont définies par les relations :

$$[VII.b.2] \quad I_o = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\int_o^\infty\ldots\int_o^\infty G(\mu_1-\tau_2)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\,d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

$$[VII.b.3] \quad I_k^1 = G(\tau_1)\int_o^\infty\ldots\int_o^\infty G(\mu_1-\tau_1)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau_2-\mu_k)G(\mu_{k+1}-\tau_2)G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\,d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

$$[VII.b.4] \quad I_k^2 = G(\tau_2-\tau_1)\int_o^\infty\ldots\int_o^\infty G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau_1-\mu_k)G(\mu_{k+1}-\tau_2)G(\mu_{k+2}-\mu_{k+1})\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\,d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

Pour intégrer I_o on effectue sur les i varaibles $\mu_1\ldots\mu_i$, les changements suivants :

$$\lambda_1 = \mu_1 - \tau_2 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_1 = d\mu_1 \\ \mu_1 = \lambda_1 + \tau_2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i = \mu_i - \tau_2 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_i = d\mu_i \\ \mu_i = \lambda_i + \tau_2 \end{cases}$$

de telle sorte que I_o devient :

$$[VII.b.5] \quad I_o = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\int_{-\tau_2}^{\infty}\int_{-\tau_1}^{\infty} G(\lambda_1)G(\lambda_2-\lambda_1)\ \ldots\ G(\lambda_i-\lambda_{i-1})\ d\lambda_1\ \ldots\ d\lambda_i$$

qu'on intègre facilement :

$$[VII.b.6] \quad I_o = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i)}\ d\lambda$$

Pour résoudre les intégrales I_k^1, on effectue sur les variables $\mu_1 \ldots \mu_k$ les changements suivants :

$$\lambda_1 = \mu_1 - \tau_1 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_1 = d\mu_1 \\ \mu_1 = \lambda_1 + \tau_1 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_k = \mu_k - \tau_1 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_k = d\mu_k \\ \mu_k = \lambda_k + \tau_1 \end{cases}$$

et d'autre part, sur les variables $\mu_{k+1},\ldots,\mu_i$ les changements successifs suivants :

$$\lambda_{k+1} = \mu_{k+1} - \tau_2 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_{k+1} = d\mu_{k+1} \\ \mu_{k+1} = \lambda_{k+1} + \tau_2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i = \mu_i - \tau_2 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_i = d\mu_i \\ \mu_i = \lambda_i + \tau_2 \end{cases}$$

Les intégrales I_k^1 deviennent alors :

$$[VII.b.7] \quad I_k^1 = G(\tau_1) \int_{\lambda_1=\tau_1}^{\infty} \ldots \int_{\lambda_k=\tau_1}^{\infty} \int_{\lambda_{k+1}=\tau_2}^{\infty} \ldots \int_{\lambda_i=\tau_2}^{\infty} G(\lambda_1)G(\lambda_2-\lambda_1)\ldots G(\lambda_k-\lambda_{k-1})G(\tau_2-\tau_1-\lambda_{k+1})$$
$$G(\lambda_{k+1})G(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})\ldots G(\lambda_i-\lambda_{i-1})d\lambda_i \ldots d\lambda_i$$

Le calcul de ces intégrales est alors immédiat :

$$[VII.b.8] \quad I_k^1 = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)}\ d\lambda$$

Pour calculer les intégrales I_k^2, on procède aux changements successifs de variables sur $\mu_{k+1} \ldots \mu_i$:

$$\lambda_{k+1} = \mu_{k+1} - \tau_2 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_{k+1} = d\mu_{k+1} \\ \mu_{k+1} = \lambda_{k+1} + \tau_2 \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$\lambda_i = \mu_i - \tau_2 \Longrightarrow \begin{cases} d\lambda_i = d\mu_i \\ \mu_i = \lambda_i + \tau_2 \end{cases}$$

de telle sorte que les intégrales I_k^2 s'écrivent :

$$[VII.b.9] \quad I_k^2 = G(\tau_2-\tau_1) \int_{\mu_1=o}^{\infty} \cdots \int_{\mu_k=o}^{\infty} \int_{\lambda_{k+1}=-\tau_2}^{\infty} \cdots \int_{\lambda_i=-\tau_2}^{\infty} G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_k-\mu_{k-1})G(\tau_1-\mu_k)$$
$$G(\lambda_{k+1})G(\lambda_{k+2}-\lambda_{k+1})\ldots G(\lambda_i-\lambda_{i-1})$$
$$d\mu_1 \ldots d\mu_k \; d\lambda_{k+1} \ldots d\lambda_i$$

Le calcul de ces intégrales est alors immédiat et on obtient :

$$[VII.b.10] \quad I_k^2 = G(\tau_2-\tau_1)G(\tau_1)^{*(k+1)} \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} \; d\lambda$$

La somme d'intégrales a donc pour expression :

$$[VII.b.11] \quad I_o + \sum_{k=1}^{i} [I_k^1 + I_k^2] = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i)} \; d\lambda +$$
$$\sum_{k=1}^{i} [G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} + G(\tau_1)^{*(k+1)}G(\tau_2-\tau_1)] \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} \; d\lambda$$

D'après [IV.3.1], l'expression du noyau de Wiener du second ordre est alors :

$$[VII.b.12] \quad k_2(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_1)\,G(\tau_2-\tau_1) + \sum_{i=1}^{\infty} A^i \, G(o)^i \left[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i)} \; d\lambda + \right.$$
$$\left. \sum_{k=1}^{i} [G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} + G(\tau_1)^{*(k+1)}G(\tau_2-\tau_1)] \int_o^{\infty} g(\lambda)^{*(i-k)} \; d\lambda \right]$$

VII.c - Simplification de l'écriture du noyau $k_2(\tau_1,\tau_2)$

On arrange l'expression [VII.b.12] en groupant les termes qui sont en facteur de $G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)$:

$$[VII.c.1] \quad \begin{cases} k_2(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) \left[1 + \sum_{i=1}^{\infty} A^i \, G(o)^i \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i)} \; d\lambda \right] + \\ \sum_{i=1}^{\infty} A^i \, G(o)^i \sum_{k=1}^{i} [G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} + G(\tau_1)^{*(k+1)}G(\tau_2-\tau_1)] \\ \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} \; d\lambda \end{cases}$$

On note alors :

$$[VII.c.2] \quad S(\lambda) = \sum_{j=o}^{\infty} A^j \, G(o)^j \, G(\lambda)^{*(j)}$$

de telle sorte que l'expression [VII.c.1] devient :

$$[VII.c.3] \quad k_2(\tau_1,\tau_2) = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) \int_o^{\infty} S(\lambda)d\lambda + \sum_{i=1}^{\infty} A^i \, G(o)^i \sum_{k=1}^{i} [G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} + G(\tau_1)^{*(k+1)} \, G(\tau_2-\tau_1)] \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} \, d\lambda$$

D'autre part on cherche à obtenir les expressions suivantes :

$$[VII.c.4] \quad \sum_{i=1}^{\infty} A^i \, G(o)^i \sum_{k=1}^{i} G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(k+1)} \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} A^j G(o)^j G(\tau_1) \, G(\tau_2-\tau_1)^{*(j+1)} C_j$$

$$[VII.c.5] \quad \sum_{i=1}^{\infty} A^i \, G(o)^i \sum_{k=1}^{i} G(\tau_1)^{*(k+1)} G(\tau_2-\tau_1) \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-k)} d\lambda = \sum_{j=1}^{\infty} A^j \, G(o)^j \, G(\tau_1)^{*(j+1)} \, G(\tau_2-\tau_1) \, B_j$$

Les coefficients C_j et B_j sont obtenus en groupant tous les termes en facteur de $A^jG(o)^jG(\tau_2-\tau_1)^{*(j+1)}$ et de $A^j \, G(o)^j \, G(\tau_1)^{*(j+1)}$ respectivement. Pour cela on impose :

$$\begin{cases} k = j \\ i \text{ variant de } j \text{ à l'infini} \end{cases}$$

$$[VII.c.6] \quad B_j = C_j = \sum_{i=j}^{\infty} A^{(i-j)} \, G(o)^{(i-j)} \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(i-j)} \, d\lambda$$

On effectue alors le changement d'indice $\nu = i-j$

$$[VII.c.7] \quad B_j = C_j = \sum_{\nu=o}^{\infty} A^{\nu} \, G(o)^{\nu} \int_o^{\infty} G(\lambda)^{*(\nu)} \, d\lambda$$

soit en faisant apparaître la série $S(\lambda)$

$$[VII.c.8] \quad B_j = C_j = \int_o^{\infty} S(\lambda) \, d\lambda$$

L'expression de $k_2(\tau_1,\tau_2)$ est alors :

$$[VII.c.9] \quad k_2(\tau_1,\tau_2) = \left[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) + \sum_{j=1}^{\infty} A^jG(o)^j \, [G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(j+1)} + G(\tau_1)^{*(j+1)} \, G(\tau_2-\tau_1)] \right] \int_o^{\infty} S(\lambda) \, d\lambda$$

On simplifie cette expression en remarquant que :

$$[VII.c.10]\quad G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) + \sum_{j=1}^{\infty} A^j\, G(o)^j\, G(\tau_1)^{*(j+1)} G(\tau_2-\tau_1) = G(\tau_2-\tau_1)G(\tau_1) * \sum_{j=o}^{\infty} A^j\, G(o)^j\, G(\tau_1)^{*(j)}$$

$$= G(\tau_2-\tau_1)G(\tau_1) * \delta(\tau_1)$$

et que d'autre part :

$$[VII.c.11]\quad \sum_{j=1}^{\infty} A^j\, G(o)^j\, G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)^{*(j+1)} = G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) * \sum_{j=o}^{\infty} A^{j+1}\, G(o)^{j+1}\, G(\tau_2-\tau_1)^{*(j+1)}$$

$$= G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) * [\delta(\tau_2-\tau_1) - \delta(\tau_2-\tau_1)]$$

Il s'ensuit que le noyau $k_2(\tau_1,\tau_2)$ s'écrit alors :

$$[VII.c.12]\quad k_2(\tau_1,\tau_2) = \left[G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1) * [\delta(\tau_1) + \delta(\tau_2-\tau_1) - \delta(\tau_2-\tau_1)]\right] \int_o^{\infty} S(\lambda)\, d\lambda$$

- : -

ANNEXE VIII

CALCUL DE LA VALEUR MOYENNE DE LA PUISSANCE RELATIVE

D'après [III.2.10] et [III.2.9], les variations relatives de puissance ont pour expression :

$$[VIII.1]\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta n}{n_o}(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \int_o^{\infty} \cdots \int_o^{\infty} h_j(\tau_1, \ldots, \tau_j)\, \Delta k(t-\tau_1) \ldots \Delta k(t-\tau_j)\, d\tau_1 \ldots d\tau_j \\ h_j(\tau_1, \ldots \tau_j) = G(\tau_1) G(\tau_2-\tau_1) \ldots G(\tau_j-\tau_{j-1}) \end{cases}$$

On note :

$$[VIII.2]\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta n}{n_o}(t) = y(t) \\ \Delta k(t) = x(t) \end{cases}$$

La valeur moyenne de ces variations est définie par :

$$[VIII.3]\quad \bar{y} = \lim_{T \to \infty} \left[\frac{1}{T} \int_o^{\infty} y(t)\, dt \right]$$

soit en exprimant y(t) selon [VIII.1] et en inversant l'ordre des intégrations :

$$[VIII.4]\quad \bar{y} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_o^{\infty} \cdots \int_o^{\infty} h_j(\tau_1, \ldots, \tau_j)\, \overline{x(t-\tau_1) \ldots x(t-\tau_j)}\, d\tau_1 \ldots d\tau_j$$

Cette expression fait apparaître les fonctions d'autocorrélation de $x(\lambda)$, où λ est obtenu par le changement de variable sur t : $\lambda = t-\tau_1$

$$[VIII.5]\quad \bar{y} = \sum_{j=1}^{\infty} \int_o^{\infty} \cdots \int_o^{\infty} h_j(\tau_1, \ldots, \tau_j)\, \Phi_{xx}^{(j-1)}(\tau_1-\tau_2, \ldots, \tau_1-\tau_j)\, d\tau_1 \ldots d\tau_j$$

Dans le cas où x(t) est un bruit blanc gaussien de densité spectrale A, toutes ses fonctions d'autocorrélation d'ordre pair sont nulles et il s'ensuit que :

$$[VIII.6]\quad \bar{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \int_o^{\infty} \cdots \int_o^{\infty} h_{2i}(\tau_1, \ldots, \tau_{2i})\, \Phi_{xx}^{(2i-1)}(\tau_1-\tau_2, \ldots, \tau_1-\tau_{2i})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{2i}$$

expression dans laquelle :

[VIII.7] $$\Phi_{xx}^{(2i-1)}(\tau_1-\tau_2,\ldots,\tau_1-\tau_{2i}) = A^i \left[\delta(\tau_1-\tau_2)\delta(\tau_4-\tau_3)\ \ldots\ \delta(\tau_{2i}-\tau_{2i-1})\right]^*$$

(pour la signification du signe * se reporter en Annexe III.a).

Les noyaux h_{2i} étant symétriques, l'intégration est immédiate, et on obtient :

[VIII.8] $$\bar{y} = \sum_{i=1}^{\infty} [1.3.5\ldots(2i-1)]\ A^i \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} h_{2i}(\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i)\ d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

On exprime alors les noyaux h_{2i} en fonction de G [cf. VIII.1]. Un raisonnement analogue à celui qu'on a fait en Annexe VI conduit à l'expression :

[VIII.9] $$h_{2i}(\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i) = \frac{2^i\cdot i!}{2i!}\ G(o)^i\ G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ \ldots\ G(\mu_i-\mu_{i-1})$$

Dans cette expression, le coefficient en facteur fait intervenir 2^i, qui est le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les deux termes des i couples de variables $\mu_1,\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_i$, i!, qui est le nombre de permutations qu'on peut effectuer sur les i variables $\mu_1,\ldots,\mu_i$, et 2i!, qui provient de la symétrisation de h_{2i}.

L'expression [VIII.8] devient :

[VIII.10] $$\bar{y} = \sum_{i=1}^{\infty}\ [1.3.5\ldots(2i-1)]\ \frac{2^i\cdot i!}{2i!}\ A^i\ G(o)^i \int_0^{\infty}\ldots\int_0^{\infty} G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ldots G(\mu_i-\mu_{i-1})\ d\mu_1\ \ldots\ d\mu_i$$

Tout d'abord, on simplifie le coefficient en facteur de cette expression (cf. IV.c.5) :

[VIII.11] $$[1.3.5\ldots(2i-1)]\ \frac{2^i\cdot i!}{2i!}\ A^i\ G(o)^i = A^i\ G(o)^i$$

Ensuite, on effectue l'intégration (cf. Annexe VI.b) et on obtient :

[VIII.12] $$\bar{y} = \sum_{i=1}^{\infty}\ A^i\ G(o)^i \int_0^{\infty} G(\lambda)^{*(i)}\ d\lambda$$

Comme d'après [IV.5.9], la puissance relative a pour valeur moyenne :

[VIII.13] $$\frac{\bar{n}}{n_o} = 1 + \frac{\overline{\Delta n}}{n_o} = 1 + \bar{y}$$

on obtient :

[VIII.14] $$\frac{\bar{n}}{n_o} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\ A^i\ G(o)^i \int_0^{\infty} G(\lambda)^{*(i)}\ d\lambda$$

soit en groupant les deux termes et en inversant l'ordre des sommations :

[VIII.15] $$\frac{\bar{n}}{n_o} = \int_o^\infty \sum_{i=o}^{\infty} A^i \, G(o)^i \, G(\lambda)^{*(i)} \, d\lambda$$

On simplifie alors l'écriture de cette expression en faisant intervenir la série $S(\lambda)$ définie par :

[VIII.16] $$S(\lambda) = \sum_{i=o}^{\infty} A^i \, G(o)^i \, G(\lambda)^{*(i)}$$

et on obtient finalement

[VIII.18] $$\frac{\bar{n}}{n_o} = \int_o^\infty S(\lambda) \, d\lambda$$

- : -

ANNEXE IX

CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU SECOND ORDRE ENTRE LES VARIATIONS RELATIVES DE PUISSANCE ET LE BRUIT BLANC GAUSSIEN

Dans l'expression [V.3.4] de cette fonction on remplace y(t) par son expression [V.3.3] et on inverse l'ordre des intégrations :

$$[IX.1] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = \int_0^\infty G(\tau)\,\overline{\Delta k(t-\tau)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)}\,d\tau + \int_0^\infty\int_0^\infty G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\,\overline{\Delta k(t-\tau_1)\Delta k(t-\tau_2)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)}\,d\tau_1\,d\tau_2 + \int_0^\infty\int_0^\infty G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\,\overline{y(t-\tau_2)\Delta k(t-\tau_1)\Delta k(t-\tau_2)x(t-\sigma_1)x(t-\sigma_2)}\,d\tau_1\,d\tau_2$$

On effectue successivement les changements de variable sur t : $t-\tau = \lambda$ et $t-\tau_2=\mu$:

$$[IX.2] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = \int_0^\infty G(\tau)\,\overline{\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma_1)x(\lambda+\tau-\sigma_2)}\,d\tau + \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\,\overline{\Delta k(\mu+\tau_2-\tau_1)\Delta k(\mu)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)}\,d\tau_1\,d\tau_2 + \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\,\overline{y(\mu)\Delta k(\mu+\tau_2-\tau_1)\Delta k(\mu)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)}\,d\tau_1\,d\tau_2$$

On calcule les valeurs moyennes en tenant compte des propriétés statistiques du bruit blanc gaussien (cf. Annexe IV.a), et en remarquant que celles-ci ne sont pas modifiées lorsque le bruit blanc est multiplié par une fonction de Heaviside. On exprime $\Delta k(t)$ selon [V.3.5] :

$$[IX.3] \quad \begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - B\,u(t) \\ B = A\,G(o) \end{cases}$$

① La première valeur moyenne est la somme de deux valeurs moyennes, dont la première est :

$$[IX.4] \quad \overline{x(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma_1)x(\lambda+\tau-\sigma_2)} = \Phi_{xx}^{(2)}(\tau-\sigma_1,\tau-\sigma_2) = 0$$

La seconde est :

$$[IX.5]\quad \begin{cases} -B\,\overline{u(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma_1)x(\lambda+\tau-\sigma_2)} = -B\,\overline{x(\lambda+\tau-\sigma_1)x(\lambda+\tau-\sigma_2)} \\ \qquad\qquad = -B\,\overline{x(\alpha)x(\alpha+\sigma_1-\sigma_2)} \\ \qquad\qquad = -B\,\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma_1-\sigma_2) \\ \qquad\qquad = -B\,A\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) \end{cases}$$

La première valeur moyenne est donc :

$$[IX.6]\quad \overline{\Delta k(\lambda)x(\lambda+\tau-\sigma_1)x(\lambda+\tau-\sigma_2)} = -B\,A\,\delta(\sigma_1-\sigma_2)$$

En choisissant des retards σ_1 et σ_2 différents cette valeur moyenne est nulle.

② Pour calculer la deuxième et troisième valeur moyenne, on développe le produit :

$$[IX.7]\quad \begin{cases} \Delta k(\mu)\Delta k(\mu+\tau_2-\tau_1) = x(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1) + B^2u(\mu)u(\mu+\tau_2-\tau_1) - B\,u(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1) \\ \qquad\qquad - B\,x(\mu)u(\mu+\tau_2-\tau_1) \end{cases}$$

de telle sorte que la seconde valeur moyenne est la somme de quatre valeurs moyennes.

$$[IX.8]\quad \begin{cases} x(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2) = \Phi_{xx}^{(3)}(\tau_2-\tau_1,\tau_2-\sigma_1,\tau_2-\sigma_2) \\ \qquad\qquad = A^2\big[\delta(\tau_2-\tau_1)\delta(\sigma_2-\sigma_1)+\delta(\tau_1-\sigma_1)\delta(\tau_2-\sigma_2) \\ \qquad\qquad\quad + \delta(\tau_1-\sigma_2)\delta(\tau_2-\sigma_1)\big] \end{cases}$$

Si on choisit les retards σ_1 et σ_2 différents :

$$[IX.9]\quad \overline{x(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = A^2\big[\delta(\tau_1-\sigma_1)\delta(\tau_2-\sigma_2)+\delta(\tau_1-\sigma_2)\delta(\tau_2-\sigma_1)\big]$$

$$[IX.10]\quad \begin{cases} B^2\overline{u(\mu)u(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = B^2\,\overline{x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} \\ \qquad\qquad = B^2\,\overline{x(\alpha)x(\alpha+\sigma_1-\sigma_2)} \\ \qquad\qquad = B^2\,\Phi_{xx}^{(1)}(\sigma_1-\sigma_2) \\ \qquad\qquad = B^2\,A\,\delta(\sigma_1-\sigma_2) \end{cases}$$

Si on choisit les retards σ_1 et σ_2 différents :

$$[IX.11]\quad \overline{u(\mu)u(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = 0$$

$$[IX.12]\quad \begin{cases} -B\ \overline{u(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = -B\ \overline{x(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} \\ \qquad = -B\ x(\alpha)x(\alpha+\tau_1-\sigma_1)x(\alpha+\tau_1-\sigma_2) \\ \qquad = -B\ \Phi^{(2)}_{xx}(\tau_1-\sigma_1,\tau_1-\sigma_2) = 0 \end{cases}$$

$$[IX.13]\quad \begin{cases} -B\ \overline{x(\mu)u(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = -B\ \overline{x(\mu)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} \\ \qquad = -B\ \Phi^{(2)}_{xx}(\tau_2-\sigma_1,\tau_2-\sigma_2) = 0 \end{cases}$$

La deuxième valeur moyenne est donc :

$$[IX.14]\quad \overline{\Delta k(\mu+\tau_2-\tau_1)\Delta k(\mu)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = A^2\left[\delta(\tau_1-\sigma_1)\delta(\tau_2-\sigma_2)+\delta(\tau_1-\sigma_2)\delta(\tau_2-\sigma_1)\right]$$

③

De même, la troisième valeur moyenne est la somme de quatre valeurs moyennes :

$$[IX.15]\quad \overline{y(\mu)x(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = \Phi^{(4)}_{yx}(o,\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2)$$

$$[IX.16]\quad \begin{cases} B^2\overline{y(\mu)u(\mu)u(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = B^2\ \overline{y(\mu)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} \\ \qquad = B^2\ \Phi^{(2)}_{yx}(\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \end{cases}$$

$$[IX.17]\quad \begin{cases} -B\overline{y(\mu)u(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = -B\ \overline{y(\mu)x(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} \\ \qquad = -B\ \Phi^{(3)}_{yx}(\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \end{cases}$$

$$[IX.18]\quad \begin{cases} -B\ \overline{y(\mu)x(\mu)u(\mu+\tau_2-\tau_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = -B\ \overline{y(\mu)x(\mu)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} \\ \qquad = -B\ \Phi^{(3)}_{yx}(o,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \end{cases}$$

La troisième valeur moyenne est donc :

$$[IX.19]\quad \begin{cases} \overline{y(\mu)\Delta k(\mu+\tau_2-\tau_1)\Delta k(\mu)x(\mu+\tau_2-\sigma_1)x(\mu+\tau_2-\sigma_2)} = \Phi^{(4)}_{yx}(o,\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \\ \qquad + B^2\ \Phi^{(2)}_{yx}(\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) - B\ \Phi^{(3)}_{yx}(\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) - B\ \Phi^{(3)}_{yx}(o,\sigma_1-\tau_2, \\ \qquad\qquad \sigma_2-\tau_2) \end{cases}$$

La fonction d'intercorrélation du second ordre a donc pour expression :

$$[IX.20]\quad \begin{cases} \Phi^{(2)}_{yx}(\sigma_1,\sigma_2) = A^2\int_o^\infty\int_o^\infty G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\left[\delta(\tau_1-\sigma_1)\delta(\tau_2-\sigma_2)+\delta(\tau_1-\sigma_2)\delta(\tau_2-\sigma_1)\right]d\tau_1 \\ \qquad\qquad d\tau_2 \\ \qquad + \int_o^\infty\int_o^\infty G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\left[\Phi^{(4)}_{yx}(o,\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) + B^2\ \Phi^{(2)}_{yx}(\sigma_1-\tau_2,\right. \\ \qquad \left.\sigma_2-\tau_2) - B\ \Phi^{(3)}_{yx}(\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) - B\ \Phi^{(3)}_{yx}(o,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2)\right] \\ \qquad\qquad d\tau_1\ d\tau_2 \end{cases}$$

On suppose alors, que l'égalité suivante est satisfaite :

$$[IX.21] \quad \left\{ \Phi_{yx}^{(4)}(o,\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2,\tau_2) + B^2\ \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) - B\ \Phi_{yx}^{(3)}(\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \right.$$
$$\left. - B\ \Phi_{yx}^{(3)}(o,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) = 0 \right.$$

A cette condition :

$$[IX.22] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = A^2 \int_0^\infty\int_0^\infty G(\tau_1)G(\tau_2-\tau_1)\left[\delta(\tau_1-\sigma_1)\delta(\tau_2-\sigma_2) + \delta(\tau_1-\sigma_2)\delta(\tau_2-\sigma_1)\right] d\tau_1\, d\tau_2$$

Le second membre de cette expression s'intègre facilement, et on obtient :

$$[IX.23] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = A^2\left[G(\sigma_1)G(\sigma_2-\sigma_1) + G(\sigma_2)G(\sigma_1-\sigma_2)\right]$$

La fonction d'intercorrélation du second ordre est donc proportionnelle à l'expression symétrique du noyau de Volterra du second ordre. En effet, en symétrisant l'expression de ce noyau, on obtient :

$$[IX.24] \quad h_2(\sigma_1,\sigma_2) = \frac{1}{2!}\left[G(\sigma_1)G(\sigma_2-\sigma_1) + G(\sigma_2)G(\sigma_1-\sigma_2)\right]$$

Par suite, la fonction d'intercorrélation du second ordre est :

$$[IX.25] \quad \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1,\sigma_2) = 2!\ A^2\ h_2(\sigma_1,\sigma_2)$$

Toutefois, les retards σ_1 et σ_2 doivent être différents et la condition [IX.21] doit être satisfaite. Cette condition peut être décomposée en deux égalités portant chacune sur deux fonctions dépendant d'un même nombre de variables :

$$[IX.26] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(4)}(o,\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) = B\ \Phi_{yx}^{(3)}(\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \\ \Phi_{yx}^{(3)}(o,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) = B\ \Phi_{yx}^{(2)}(\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \end{cases}$$

En exprimant $\Phi_{yx}^{(2)}$ selon [IX.25] et en exprimant B, ces conditions s'écrivent :

$$[IX.27] \quad \begin{cases} \Phi_{yx}^{(4)}(o,\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) = A\ G(o)\ \Phi_{yx}^{(3)}(\tau_1-\tau_2,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \\ \Phi_{yx}^{(3)}(o,\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) = 2!\ A^3\ G(o)\ h_2(\sigma_1-\tau_2,\sigma_2-\tau_2) \end{cases}$$

ANNEXE X

CALCULS RELATIFS A LA FONCTION D'INTERCORRELATION D'ORDRE QUELCONQUE ENTRE LES VARIATIONS RELATIVES DE LA PUISSANCE ET LE BRUIT BLANC GAUSSIEN

Le signal de réactivité $\Delta k(t)$ étant défini par la relation :

$$[X.1] \qquad \begin{cases} \Delta k(t) = x(t) - B\,u(t) \\ B \quad\;\; = A\,G(o) \end{cases}$$

le produit des fonctions $\Delta k(t)$ se développe sous une forme polynomiale, qu'on note P_i et qui s'écrit sous la forme simplifiée suivante, en tenant compte du fait que les retards τ_j jouent le même rôle :

$$[X.2] \qquad \begin{cases} P_i = \Delta k(\lambda_i)\Delta k(\lambda_i+\tau_i-\tau_1) \;\ldots\; \Delta k(\lambda_i+\tau_i-\tau_{i-1}) = \\ \qquad \left[x(\lambda_i) - Bu(\lambda_i)\right] \sum_{m=o}^{i-1} (-1)^m\, C_m \left[\prod_{j=1}^{m} u(\lambda_i+\tau_i-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=m+1}^{i-1} x(\lambda_i+\tau_i-\tau_j)\right] \end{cases}$$

$$[X.3] \qquad \text{où} \begin{cases} C_o = 1 \\ C_m = \dfrac{(i-1)(i-2)\ldots(i-m)}{m!}\, B^m \end{cases}$$

$$[X.4] \qquad \text{et} \left\{ \begin{array}{l} \prod_{j=1}^{o} u(\lambda_i+\tau_i-\tau_j) = 1 \\ \\ \prod_{j=i}^{i=1} x(\lambda_i+\tau_i-\tau_j) = 1 \end{array} \right\} \text{ par convention d'écriture}$$

On effectue alors le calcul de la valeur moyenne :

$$[X.5] \qquad \overline{P_i\; x(\lambda_i+\tau_i-\sigma_1) \;\ldots\; x(\lambda_i+\tau_i-\sigma_n)}$$

en exprimant les fonctions d'autocorrélation de $x(t)$ et en tenant compte du fait que la multiplication par une fonction de Heaviside ne modifie pas les propriétés statistiques de $x(t)$; cette valeur moyenne est alors la somme de deux termes dont le premier est :

$$[X.6] \qquad \begin{cases} \overline{x(\lambda_i) \sum_{m=o}^{i-1} (-1)^m\, C_m \left[\prod_{j=1}^{m} u(\lambda_i+\tau_i-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=m+1}^{i-1} x(\lambda_i+\tau_i-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{n} x(\lambda_i+\tau_i-\sigma_j)\right]} = \\ \qquad \sum_{m=o}^{i-1} (-1)^m\, C_m\, \Phi_{xx}^{(n+i-m-1)}(\tau_i-\tau_{m+1},\ldots,\tau_i-\tau_{i-1},\tau_i-\sigma_1,\ldots,\tau_i-\sigma_n) \end{cases}$$

Le second terme est obtenu en effectuant sur λ_i le changement de variable: $\lambda_i+\tau_i-\sigma_n = \mu_i$:

$$[X.7]\quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{- Bu(\mu_i+\sigma_n-\tau_i)x(\mu_i) \sum_{m=o}^{i-1} (-1)^m C_m \left[\prod_{j=1}^{m} u(\mu_i+\sigma_n-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=m+1}^{i-1} x(\mu_i+\sigma_n-\tau_j)\right]} \\ \left[\prod_{j=1}^{n} x(\mu_i+\sigma_n-\sigma_j)\right] = - B \sum_{m=o}^{i-1} (-1)^m C_m \Phi_{xx}^{(n+i-m-2)}(\sigma_n-\tau_{m+1},\ldots,\sigma_n-\tau_{i-1}, \\ \qquad\qquad \sigma_n-\sigma_1,\ldots,\sigma_n-\sigma_{n-1}) \end{array} \right.$$

On exprime alors les fonctions d'autocorrélation du bruit blanc gaussien x(t). Si les retards σ sont choisis différents entre eux, et dans le cas où i est inférieur à n, toutes ces fonctions comporteront au moins un facteur de la forme $\delta(\sigma_i-\sigma_j)$ et seront donc toutes nulles. Par suite l'expression [X.5] ne comportera qu'un seul terme, obtenu pour i=n et m=0 :

$$[X.8]\quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{P_n\, x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_1)\ldots x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_n)} = \Phi_{xx}^{(2n-1)}(\tau_n-\tau_1,\ldots,\tau_n-\tau_{n-1},\tau_n-\sigma_1,\ldots,\tau_n-\sigma_n) \\ \qquad = A^n \left[\delta(\tau_n-\tau_1)\delta(\tau_2-\tau_3)\ldots\delta(\sigma_n-\sigma_{n-1})\right]^* \\ \qquad = n!\, A^n \left[\delta(\sigma_1-\tau_1)\delta(\sigma_2-\tau_2)\ldots\delta(\sigma_n-\tau_n)\right] \end{array} \right.$$

(pour la signification du signe *, se reporter en Annexe IV.a)

On calcule ensuite la valeur moyenne :

$$[X.9]\qquad \overline{y(\lambda_n)\, P_n\, x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_1)\ \ldots\ x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_n)}$$

en exprimant les fonctions d'intercorrélation entre y(t) et x(t). Cette valeur moyenne est la somme de deux termes dont le premier est :

$$[X.10]\quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{y(\lambda_n)x(\lambda_n) \sum_{m=o}^{n-1} (-1)^m C_m \left[\prod_{j=1}^{m} u(\lambda_n+\tau_n-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=m+1}^{n-1} x(\lambda_n+\tau_n-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{n} x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_j)\right]} = \\ \qquad \sum_{m=o}^{n-1} (-1)^m C_m \Phi_{yx}^{(2n-m)}(o,\tau_{m+1}-\tau_n,\ldots,\tau_{n-1}-\tau_n,\sigma_1-\tau_n,\ldots,\sigma_n-\tau_n) \end{array} \right.$$

Le second terme est :

$$[X.11]\quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{- B\, y(\lambda_n)u(\lambda_n) \sum_{m=o}^{n-1} (-1)^m C_m \left[\prod_{j=1}^{m} u(\lambda_n+\tau_n-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=m+1}^{n-1} x(\lambda_n+\tau_n-\tau_j)\right]\left[\prod_{j=1}^{n} x(\lambda_n+\tau_n-\sigma_j)\right]} \\ \qquad = - B \sum_{m=o}^{n-1} (-1)^m C_m \Phi_{yx}^{(2n-m-1)}(\tau_{m+1}-\tau_n,\ldots,\tau_{n-1}-\tau_n,\sigma_1-\tau_n,\ldots,\sigma_n-\tau_n) \end{array} \right.$$

Pour simplifier l'écriture des fonctions d'intercorrélation, on effectue les changements de variables suivants :

$$[X.12]\quad \begin{cases} \tau_{m+1}-\tau_n = \mu_1 \\ \quad\vdots \\ \tau_{n-1}-\tau_n = \mu_{n-1-m} \\ \sigma_1 - \tau_n = \mu_{n-m} \\ \quad\vdots \\ \sigma_n - \tau_n = \mu_{2n-m-1} \end{cases}$$

L'expression [X.9] s'écrit :

$$[X.13]\quad \begin{cases} y(\lambda_n)\, P_n\, x(\lambda_n-\mu_{n-m}) \ldots x(\lambda_n-\mu_{2n-m-1}) = \\ \qquad \sum_{m=o}^{n-1} (-1)^m\, C_m \left[\Phi_{yx}^{(2n-m)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1}) - B\, \Phi_{yx}^{(2n-m-1)}(\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1}) \right] \end{cases}$$

Dans la mesure où, pour toute valeur de m comprise entre 0 et n-1, on égale à 0 et n-1, l'égalité suivante est vérifiée :

$$[X.14]\quad \Phi_{yx}^{(2n-m)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1}) = B\, \Phi_{yx}^{(2n-m-1)}(\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1})$$

la contribution de l'expression [X.13] est nulle. Dans ce cas, l'expression [V.4.4] de la fonction d'intercorrélation d'ordre n est :

$$[X.15]\quad \Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = n!\, A^n \int_o^\infty \ldots \int_o^\infty h_n(\tau_1,\ldots,\tau_n) \left[\delta(\sigma_1-\tau_1)\delta(\sigma_2-\tau_2)\ldots\delta(\sigma_n-\tau_n) \right] d\tau_1 \ldots d\tau_n$$

L'intégration du second membre de cette expression est immédiate et on obtient finalement :

$$[X.16]\quad \Phi_{yx}^{(n)}(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) = n!\, A^n\, h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$$

pour les conditions suivantes :

$$[X.17]\quad \begin{cases} \sigma_i \neq \sigma_j \\ \Phi_{yx}^{(2n-m)}(o,\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1}) = A\, G(o)\, \Phi_{yx}^{(2n-m-1)}(\mu_1,\ldots,\mu_{2n-m-1}) \\ \qquad \text{pour } o \leqslant m \leqslant n-1 \\ h_n(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \text{ noyau symétrique.} \end{cases}$$

ANNEXE XI

RELATION ENTRE LES NOYAUX DE VOLTERRA h_{n+1} et h_n DES EQUATIONS DE LA CINETIQUE

D'après [III.2.9], le noyau h_{n+1} a pour expression symétrique :

$$[XI.1] \qquad n_{n+1}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n+1}) = \frac{1}{(n+1)!}\left[G(\sigma_1)G(\sigma_2-\sigma_1)\ \ldots\ G(\sigma_{n+1}-\sigma_n)\right]^*$$

où le signe * signifie qu'on effectue la somme des fonctions non symétriques telles que celle à laquelle s'applique l'opération *, et que ces fonctions sont écrites avec toutes les permutations possibles des arguments σ. On attribue alors à ces arguments les valeurs suivantes :

$$[XI.2] \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_j = \mu_{j-1} \text{ pour les valeurs de } j \text{ telles que } 2 \leqslant j \leqslant n+1 \end{cases}$$

Pour ces valeurs, n! fonctions sont de la forme :

$$[XI.3] \qquad G(o)\ G(\mu_1)\ G(\mu_2-\mu_1)\ \ldots\ G(\mu_n-\mu_{n-1})$$

et toutes les autres fonctions sont nulles, car toutes comprennent un facteur tel que $G(\mu_i)\ G(-\mu_i)$, qui est identiquement nul.

L'expression symétrique du noyau h_{n+1} est donc pour ces valeurs de σ :

$$[XI.4] \qquad h_{n+1}(o,\mu_1,\ldots,\mu_n) = \frac{G(o)}{(n+1)!}\left[G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ \ldots\ G(\mu_n-\mu_{n-1})\right]^*$$

Comme, par ailleurs, l'expression symétrique du noyau h_n est :

$$[XI.5] \qquad h_n(\mu_1,\ldots,\mu_n) = \frac{1}{n!}\left[G(\mu_1)G(\mu_2-\mu_1)\ \ldots\ G(\mu_n-\mu_{n-1})\right]^*$$

il s'ensuit que le noyau h_{n+1} s'exprime, de façon symétrique, par la relation :

$$[XI.6] \qquad h_{n+1}(o,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n) = \frac{n!}{(n+1)!}\,G(o)\ h_n(\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

Par suite, le noyau h_n s'exprime en fonction du noyau h_{n+1}, par la relation :

$$[XI.7] \qquad h_n(\mu_1,\ldots,\mu_n) = \frac{(n+1)!}{n!G(o)}\,h_{n+1}(o,\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

ANNEXE XII

CALCUL DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU PREMIER ORDRE ENTRE UN SIGNAL PSEUDO-ALEATOIRE TERNAIRE ET LA REPONSE D'UN SYSTEME LINEAIRE A CE SIGNAL

Cette fonction est définie par la relation [VII.1.7] :

$$[XII.1] \qquad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\ \Phi_{xx}^{(1)}(\sigma-\tau)\ d\tau$$

On effectue le changement de variable : $\sigma-\tau = \theta$

$$[XII.2] \qquad \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\sigma} h(\sigma-\theta)\ \Phi_{xx}^{(1)}(\theta)\ d\theta$$

On exprime alors $\Phi_{xx}^{(1)}(\theta)$ au moyen des relations définies au paragraphe [VI.2] :

$$[XII.3] \qquad \begin{cases} \Phi_{xx}^{(1)}(\theta) = K\left[\frac{1}{\Delta t}(\theta-nT)+1\right] & \text{pour } nT-\Delta t \leqslant \theta \leqslant nT \\ \Phi_{xx}^{(1)}(\theta) = K\left[\frac{1}{\Delta t}(\theta-nT)+1\right] & \text{pour } nT \leqslant \theta \leqslant nT+\Delta t \\ \Phi_{xx}^{(1)}(\theta) = K\left[-\frac{1}{\Delta t}(\theta-\frac{nT}{2})\quad 1\right] & \text{pour } \frac{nT}{2}-\Delta t \leqslant \theta \leqslant \frac{nT}{2} \\ \Phi_{xx}^{(1)}(\theta) = K\left[\frac{1}{\Delta t}(\theta-\frac{nT}{2})-1\right] & \text{pour } \frac{nT}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{nT}{2}+\Delta t \\ \Phi_{xx}^{(1)}(\theta) = 0 & \text{pour toute autre valeur de } \theta \end{cases}$$

On définit alors les intégrales suivantes :

$$[XII.4] \qquad I_{1,n} = \int_{nT-\Delta t}^{nT} \left[\frac{1}{\Delta t}(\theta-nT)+1\right] h(\sigma-\theta)\ d\theta$$

$$[XII.5] \qquad I_{2,n} = \int_{nT}^{nT+\Delta t} \left[-\frac{1}{\Delta t}(\theta-nT)+1\right] h(\sigma-\theta)\ d\theta$$

$$[XII.6] \qquad I_{3,n} = \int_{\frac{nT}{2}-\Delta t}^{\frac{nT}{2}} \left[-\frac{1}{\Delta t}(\theta-\frac{nT}{2})-1\right] h(\sigma-\theta)\ d\theta$$

$$[XII.7] \qquad I_{4,n} = \int_{\frac{nT}{2}}^{\frac{nT}{2}+\Delta t} \left[\frac{1}{\Delta t}(\theta-\frac{nT}{2})-1\right] h(\sigma-\theta)\ d\theta$$

[XII.8] $$I_{2,\sigma} = \int_{o}^{\sigma} \left[-\frac{\theta}{\Delta t} + 1\right] h(\sigma-\theta)\, d\theta$$

de telle sorte que, dans l'intervalle $[o, \frac{T}{2} - \Delta t]$, $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ est exprimée par les relations :

[XII.9]
$$\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + K \left[I_{1,o} + I_{2,\sigma}\right] \quad \text{pour} \quad o \leqslant \sigma \leqslant \Delta t$$

$$\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + K \left[I_{1,o} + I_{2,o}\right] \quad \text{pour} \quad \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \frac{T}{2} - \Delta t$$

Toutes les intégrales définies précédemment sont de la forme :

[XII.10] $$I = \int_{a}^{b} [k\theta + k'] \, h(\sigma-\theta)\, d\theta$$

dont la solution est :

[XII.11] $$I = -k \left[\theta\, H_1(\sigma-\theta)\right]_a^b - k \left[H_2(\sigma-\theta)\right]_a^b - k' \left[H_1(\sigma-\theta)\right]_a^b$$

Dans cette expression :

[XII.12]
$$\begin{cases} \frac{d}{d\theta}\left[H_1(\theta)\right] = h(\theta) \\ \\ \frac{d}{d\theta}\left[H_2(\theta)\right] = H_1(\theta) \end{cases}$$

En développant l'expression [XII.11], on obtient :

[XII.13] $$I = k\left[a\, H_1(\sigma-a) - bH_1(\sigma-b)\right] + k\left[H_2(\sigma-a) - H_2(\sigma-b)\right] + k'\left[H_1(\sigma-a) - H_1(\sigma-b)\right]$$

Le calcul des intégrales $I_{i,n}$ s'effectue par application directe de la relation [XII.13] en attribuant les valeurs correctes de k, k', a et b :

[XII.14] $$I_{1,n} = \frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma-nT+\Delta t) - H_2(\sigma-nT)\right] - H_1(\sigma-nT)$$

[XII.15] $$I_{2,n} = -\frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma-nT) - H_2(\sigma-nT-\Delta t)\right] + H_1(\sigma-nT)$$

[XII.16] $$I_{3,n} = -\frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma-\frac{nT}{2}+\Delta t) - H_2(\sigma-\frac{nT}{2})\right] + H_1(\sigma-\frac{nT}{2})$$

[XII.17] $$I_{4,n} = \frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma-\frac{nT}{2}) - H_2(\sigma-\frac{nT}{2}-\Delta t\right] - H_1(\sigma-\frac{nT}{2})$$

[XII.18] $$I_{2,\sigma} = \left[\frac{\sigma}{\Delta t} - 1\right] H_1(o) + H_1(\sigma) - \frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma) - H_2(o)\right]$$

Les intégrales $I_{1,o}$ et $I_{2,o}$ sont calculées à partir des expressions [XII.14] et [XII.15] en faisant n=o :

[XII.19] $$I_{1,o} = \frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma+\Delta t) - H_2(\sigma)\right] - H_1(\sigma)$$

[XII.20] $$I_{2,o} = -\frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma) - H_2(\sigma-\Delta t)\right] + H_1(\sigma)$$

On remplace alors dans les expressions [XII.9] les différentes intégrales par leurs expressions précédemment calculées :

[XII.21] $$\begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + K\left[\frac{\sigma}{\Delta t} - 1\right] H_1(o) + \frac{K}{\Delta t}\left[H_2(\sigma+\Delta t)+H_2(o)-H_2(\sigma)\right] \\ o \leqslant \sigma \leqslant \Delta t \end{cases}$$

[XII.22] $$\begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + \frac{K}{\Delta t}\left[H_2(\sigma+\Delta t) + H_2(\sigma-\Delta t) - 2\,H_2(\sigma)\right] \\ \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \frac{T}{2} - \Delta t \end{cases}$$

[XII.23] $$\begin{cases} \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} = \frac{1}{\Delta t}\Big[H_2(\sigma-nT+\Delta t) + H_2(\sigma-nT-\Delta t) - 2\,H_2(\sigma-nT) + 2\,H_2(\sigma-\frac{nT}{2}) \\ \qquad\qquad - H_2(\sigma-\frac{nT}{2}+\Delta t) - H_2(\sigma-\frac{nT}{2}-\Delta t)\Big] \end{cases}$$

ANNEXE XIII

CALCUL DE L'EXPRESSION DE LA FONCTION D'INTERCORRELATION DU PREMIER ORDRE AU MOYEN DE DEVELOPPEMENTS EN SERIE DE TAYLOR

En exprimant les intégrales $I_{1,n}$ et $I_{2,n}$ selon [XII.14] et [XII.15], la somme de ces deux intégrales est :

$$[XIII.1] \quad I_{1,n} + I_{2,n} = \frac{1}{\Delta t}\left[H_2(\sigma-nT+\Delta t) + H_2(\sigma-nT-\Delta t) - 2\,H_2(\sigma-nT\right]$$

Les développements en série de Taylor de $H_2(\sigma-nT+\Delta t)$ et de $H_2(\sigma-nT-\Delta t)$ autour du point d'abscisse $(\sigma-nT)$ s'écrivent :

$$[XIII.2] \quad \begin{cases} H_2(\sigma-nT+\Delta t) = H_2(\sigma-nT) + \Delta t\, H_1(\sigma_1-nT) + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!}\, h^{(k-2)}(\sigma-nT) \\ H_2(\sigma-nT-\Delta t) = H_2(\sigma-nT) - \Delta t\, H_1(\sigma_1-nT) + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\Delta t^k}{k!}\, h^{(k-2)}(\sigma-nT) \end{cases}$$

si on adopte la convention d'écriture :

$$[XIII.3] \quad \begin{cases} \dfrac{d^k}{d\sigma^k}[h(\sigma)] = h^{(k)}(\sigma) \\ h^{(o)}(\sigma) = h(\sigma) \end{cases}$$

La relation [XIII.1] s'écrit alors :

$$[XIII.4] \quad I_{1,n} + I_{2,n} = \frac{2}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{2k}}{2k!}\, h^{(2k-2)}(\sigma-nT)$$

De même, la somme $I_{3,n} + I_{4,n}$ s'écrit :

$$[XIII.5] \quad I_{3,n} + I_{4,n} = \frac{1}{\Delta t}\left[2\,H_2\left(\sigma-\frac{nT}{2}\right) - H_2\left(\sigma-\frac{nT}{2}-\Delta t\right) + H_2\left(\sigma-\frac{nT}{2}+\Delta t\right)\right]$$

Le développement en séries de Taylor de $H_2\left(\sigma-\frac{nT}{2}-\Delta t\right)$ et de $H_2\left(\sigma-\frac{nT}{2}+\Delta t\right)$ autour du point d'abscisse $\left(\sigma-\frac{nT}{2}\right)$ permet de simplifier cette somme :

$$[XIII.6] \quad I_{3,n} + I_{4,n} = -\frac{2}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{2k}}{2k!}\, h^{(2k-2)}\left(\sigma-\frac{nT}{2}\right)$$

Par suite :

$$[XIII.7] \quad \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} = \frac{2}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{2k}}{2k!} \left[h^{(2k-2)}(\sigma - nT) - h^{(2k-2)}(\sigma - \frac{nT}{2}) \right]$$

L'application directe de l'expression [XIII.5] pour n=o donne :

$$[XIII.8] \quad I_{1,o} + I_{2,o} = \frac{2}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{2k}}{2k!} h^{(2k-2)}(\sigma)$$

Par ailleurs, d'après les relations [XII.18] et [XII.19] :

$$[XIII.9] \quad I_{1,o} + I_{2,\sigma} = K \left[\frac{\sigma}{\Delta t} - 1 \right] H_1(o) + \frac{K}{\Delta t} \left[H_2(\sigma+\Delta t) + H_2(o) - 2 H_2(\sigma) \right]$$

En développant $H_2(\sigma+\Delta t)$ en série de Taylor autour du point d'abscisse σ, cette somme s'écrit :

$$[XIII.10] \quad I_{1,o} + I_{2,\sigma} = K \left[\frac{\sigma}{\Delta t} - 1 \right] H_1(o) + \frac{K}{\Delta t} \left[H_2(o) - H_2(\sigma) + \Delta t \, H_1(\sigma) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} h^{(k-2)}(\sigma) \right]$$

La fonction d'intercorrélation $\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$ s'exprime alors par les relations :

$$[XIII.11] \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + K \left[\frac{\sigma}{\Delta t} - 1 \right] H_1(o) + \frac{K}{\Delta t} \\ \qquad \left[H_2(o) - H_2(\sigma) + \Delta t \, H_1(\sigma) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} h^{(k-2)}(\sigma) \right] \\ o \leqslant \sigma \leqslant \Delta t \end{cases}$$

$$[XIII.12] \begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = K \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^{4} I_{i,n} \right\} + \frac{2K}{\Delta t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta t^{2k}}{2k!} h^{(2k-2)}(\sigma) \\ \Delta t \leqslant \sigma \leqslant \frac{T}{2} - \Delta t \end{cases}$$

la somme $\sum_{i=1}^{4} I_{i,n}$ étant définie par la relation [XIII.7].

ANNEXE XIV

RESULTATS NUMERIQUES

XIV.a - Cas 1

$\Delta t = 0,15$ s $C_1 = C_2 = \ldots = C_7 = 1$

	$\Phi^{(1)}_{yx}(\sigma)$			
σ_s	1ère itération	2ème itération	3ème itération	4ème itération
0	1,047 10^{-4}	8,457 10^{-5}	8,798 10^{-5}	8,740 10^{-5}
0,15	5,046 10^{-6}	5,164 10^{-6}	5,174 10^{-6}	5,157 10^{-6}
0,3	3,195 "	3,738 "	3,680 "	3,678 "
0,45	2,863 "	3,374 "	3,319 "	3,312 "
0,60	2,642 "	3,081 "	3,037 "	3,032 "
0,75	2,594 "	2,843 "	2,828 "	2,813 "
0,90	2,179 "	2,728 "	2,666 "	2,646 "
1,05	2,098 "	2,548 "	2,502 "	2,513 "
1,20	2,139 "	2,388 "	2,372 "	2,373 "
1,35	2,322 "	2,267 "	2,298 "	2,269 "
1,50	1,861 "	2,221 "	2,189 "	2,200 "
1,65	2,097 "	2,073 "	2,099 "	2,124 "
1,80	1,844 "	2,123 "	2,101 "	2,074 "
1,95	2,034 "	1,937 "	1,975 "	2,000 "
2,10	1,670 "	1,973 "	1,948 "	1,947 "
2,25	1,730 "	1,882 "	1,880 "	1,908 "
2,40	1,619 "	1,870 "	1,852 "	1,859 "
2,55	1,632 "	1,838 "	1,828 "	1,813 "
2,70	1,558 "	1,816 "	1,798 "	1,810 "
2,85	1,357 "	1,789 "	1,744 "	1,769 "
3,00	1,284 "	1,794 "	1,736 "	1,720 "
3,15	1,383 "	1,767 "	1,730 "	1,704 "
3,30	1,501 "	1,603 "	1,609 "	1,641 "
3,45	1,288 "	1,689 "	1,649 "	1,659 "
3,60	1,313 "	1,625	1,596 "	1,630

XIV.b - Cas 3

$\Delta t = 0,15$ s $C_1 = C_7 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = C_4 = 1$, $C_5 = C_6 = -1$

	$\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$				
σ_s	1ère itération	2ème itération	3ème itération	4ème itération	5ème itération
0	1,049 10^{-4}	8,727 10^{-5}	8,990 10^{-5}	8,950 10^{-5}	8,956 10^{-5}
0,15	2,412 10^{-6}	5,941 10^{-6}	5,474 10^{-6}	5,546 10^{-6}	5,535 10^{-6}
0,3	0,251 "	4,492 "	3,923 "	4,011 "	3,997 "
0,45	0,470 "	4,057 "	3,575 "	3,650 "	3,638 "
0,6	-0,350 "	3,870 "	3,303 "	3,391 "	3,377 "
0,75	-0,726 "	3,615 "	3,031 "	3,121 "	3,108 "
0,9	-0,326 "	3,336 "	2,843 "	2,919 "	2,908 "
1,05	-0,626 "	3,247 "	2,725 "	2,806 "	2,794 "
1,20	-0,891 "	3,131 "	2,590 "	2,674 "	2,661 "
1,35	-0,886 "	3,012 "	2,488 "	2,569 "	2,557 "
1,50	-0,669 "	2,837 "	2,364 "	2,437 "	2,426 "
1,65	-0,908 "	2,812 "	2,313 "	2,390 "	2,378 "
1,80	-0,915 "	2,722 "	2,233 "	2,309 "	2,298 "
1,95	-0,952 "	2,628 "	2,147 "	2,221 "	2,210 "
2,10	-0,660 "	2,516 "	2,090 "	2,156 "	2,146 "
2,25	-0,971 "	2,498 "	2,034 "	2,106 "	2,095 "
2,40	-0,610 "	2,405 "	2,001 "	2,064 "	2,054 "
2,55	-0,541 "	2,303 "	1,922 "	1,981 "	1,972 "
2,70	-0,662 "	2,316 "	1,918 "	1,979 "	1,970 "
2,85	-0,726 "	2,238 "	1,841 "	1,903 "	1,894 "
3,00	-0,658 "	2,279 "	1,886 "	1,946 "	1,937 "
3,15	-1,014 "	2,267 "	1,826 "	1,894 "	1,884 "
3,30	-0,997 "	2,204 "	1,775 "	1,841 "	1,831 "
3,45	-0,808 "	2,170 "	1,770 "	1,832 "	1,823 "
3,60	-0,584 "	1,977 "	1,636 "	1,688 "	1,680 "
3,75	-0,471 "	2,031 "	1,700 "	1,750	1,742 "

XIV.c - Cas 2

$\Delta t = 0,3$ s $\qquad C_1 = C_2 = \ldots = C_7 = 1$

	$\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$			
σ_s	1ère itération	2ème itération	3ème itération	4ème itération
0	1,283 10^{-4}	8,025 10^{-5}	9,473 10^{-5}	9,001 10^{-5}
0,3	7,590 10^{-6}	7,202 10^{-6}	7,581 10^{-6}	7,486 10^{-6}
0,6	5,453 "	6,018 "	6,129 "	6,124 "
0,9	4,683 "	5,263 "	5,350 "	5,350 "
1,2	4,157 "	4,761 "	4,830 "	4,835 "
1,5	4,226 "	4,284 "	4,497 "	4,453 "
1,8	3,245 "	4,192 "	4,163 "	4,200 "
2,1	3,060 "	3,970 "	3,957 "	3,990 "
2,4	3,414 "	3,623 "	3,782 "	3,754 "
2,7	3,870 "	3,309 "	3,666 "	3,570 "
3,0	2,710 "	3,448 "	3,472 "	3,491 "
3,3	3,508 "	3,120 "	3,425 "	3,346 "
3,6	2,832 "	3,186 "	3,293 "	3,281 "
3,9	3,338 "	2,905 "	3,233 "	3,146 "

XIV.d - Cas 4

$\Delta t = 0,3$ s $\qquad C_1 = C_7 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = C_4 = 1$, $C_5 = C_6 = -1$

	$\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$				
σ_s	1ère itération	2ème itération	3ème itération	4ème itération	5ème itération
0	1,288 10^{-4}	8,610 10^{-5}	9,745 10^{-5}	9,421 10^{-5}	9,512 10^{-5}
0,3	1,187 10^{-6}	9,699 10^{-6}	7,913 10^{-6}	8,464 10^{-6}	8,313 10^{-6}
0,6	-1,585 "	8,566 "	6,380 "	7,047 "	6,863 "
0,9	-1,130 "	7,489 "	5,634 "	6,200 "	6,045 "
1,2	-3,080 "	7,328 "	5,067 "	5,756 "	5,567 "
1,5	-3,834 "	6,986 "	4,630 "	5,348 "	5,151 "
1,8	-2,735 "	6,325 "	4,351 "	4,952 "	4,787 "
2,1	-3,399 "	6,246 "	4,136 "	4,777 "	4,601 "
2,4	-4,003 "	6,117 "	3,908 "	4,579 "	4,395 "
2,7	-3,965 "	5,898 "	3,750 "	4,403 "	4,224 "
3,0	-3,286 "	5,516 "	3,587 "	4,173 "	4,012 "
3,3	-3,884 "	5,542 "	3,487 "	4,112 "	3,940 "
3,6	-3,838 "	5,375 "	3,366 "	3,977 "	3,809 "
3,9	-3,832 "	5,227 "	3,247 "	3,849 "	3,683 "

XIV.c - Fonction d'intercorrélation théorique du noyau du premier ordre des équations de la cinétique

$$\begin{cases} \Phi_{yx}^{(1)}(\sigma) = \dfrac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B^2 \, \Delta t \, h_1(\sigma) \\ m = 7 \\ B = 100 \text{ pcm} \end{cases}$$

	$\Phi_{yx}^{(1)}(\sigma)$	
σ_s	$\Delta t = 0,15$ s	$\Delta t = 0,3$ s
0,00	$2,000\ 10^{-3}$	$4,000\ 10^{-3}$
0,15	$5,822\ 10^{-6}$	
0,30	$5,157$ "	$1,031\ 10^{-5}$
0,45	$4,682$ "	
0,60	$4,329$ "	$8,659\ 10^{-6}$
0,75	$4,058$ "	
0,90	$3,841$ "	$7,683$ "
1,05	$3,665$ "	
1,20	$3,518$ "	$7,036$ "
1,35	$3,394$ "	
1,50	$3,287$ "	$6,573$ "
1,65	$3,194$ "	
1,80	$3,112$ "	$6,224$ "
1,95	$3,040$ "	
2,10	$2,975$ "	$5,950$ "
2,25	$2,917$ "	
2,40	$2,864$ "	$5,728$ "
2,55	$2,816$ "	
2,70	$2,772$ "	$5,544$ "
2,85	$2,731$ "	
3,00	$2,694$ "	$5,387$ "
3,15	$2,658$ "	
3,30	$2,625$ "	$5,249$ "
3,45	$2,593$ "	
3,60	$2,564$ "	$5,127$ "
3,75	$2,535$ "	
3,90	$2,508$ "	$5,016$ "

LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Signal pseudo-aléatoire ternaire à deux coefficients

Figure 2 : Fonction d'autocorrélation du premier ordre d'un signal pseudo-aléatoire ternaire

Figure 3 : Fonction d'autocorrélation du troisième ordre d'un signal pseudo-aléatoire ternaire

Figure 4 : Carte du coeur de CABRI pour les expériences de modulation

Figure 5 : Dispositif expérimental

Figure 6 : Courbe d'étalonnage position-réactivité

Figure 7 : Signal pseudo-aléatoire ternaire

Figure 8 : Signal de puissance

Figure 9 : Organigramme du programme numérique

Figure 10 : Cas 1

Figure 11 : Cas 2

Figure 12 : Cas 3

Figure 13 : Cas 4

Figure 14 : Cas 1 et 3

Figure 15 : Cas 2 et 4

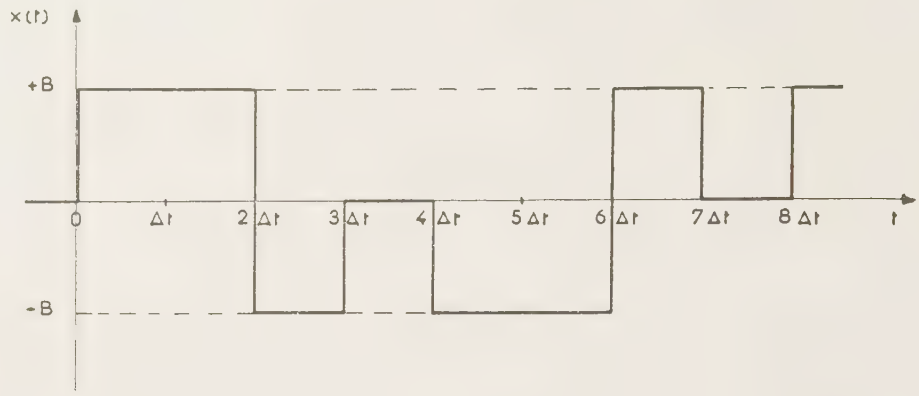
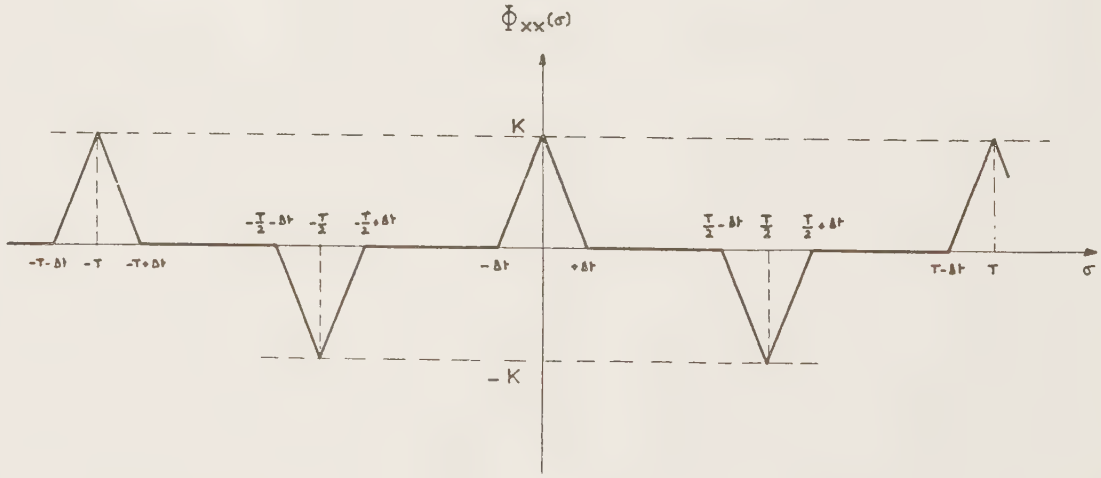
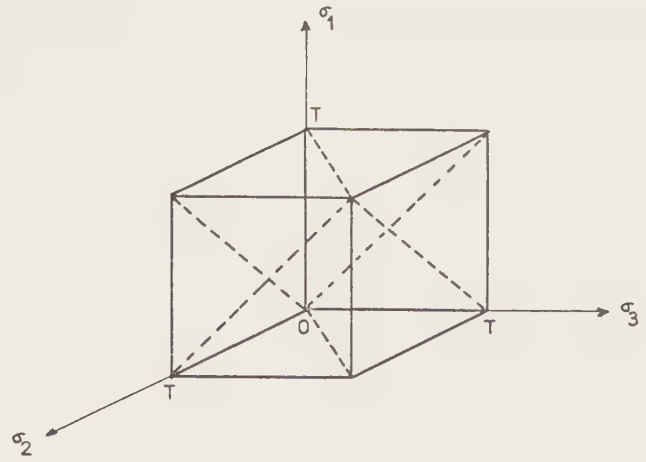


FIGURE 1 : SIGNAL PSEUDO-ALÉATOIRE TERNAIRE A DEUX COEFFICIENTS



$$K = \frac{2 \times 3^{m-1}}{3^m - 1} B$$

FIGURE 2 : FONCTION D'AUTOCORRÉLATION DU PREMIER ORDRE
D'UN SIGNAL PSEUDO-ALÉATOIRE TERNAIRE



--- Points de l'espace $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ où : $\Phi_{xx}(0, k\Delta t, k\Delta t) = \frac{2}{3}\,\Phi_{xx}(0,0,0)$

FIGURE 3 : FONCTION D'AUTOCORRÉLATION DU TROISIÈME ORDRE D'UN SIGNAL PSEUDO-ALÉATOIRE TERNAIRE

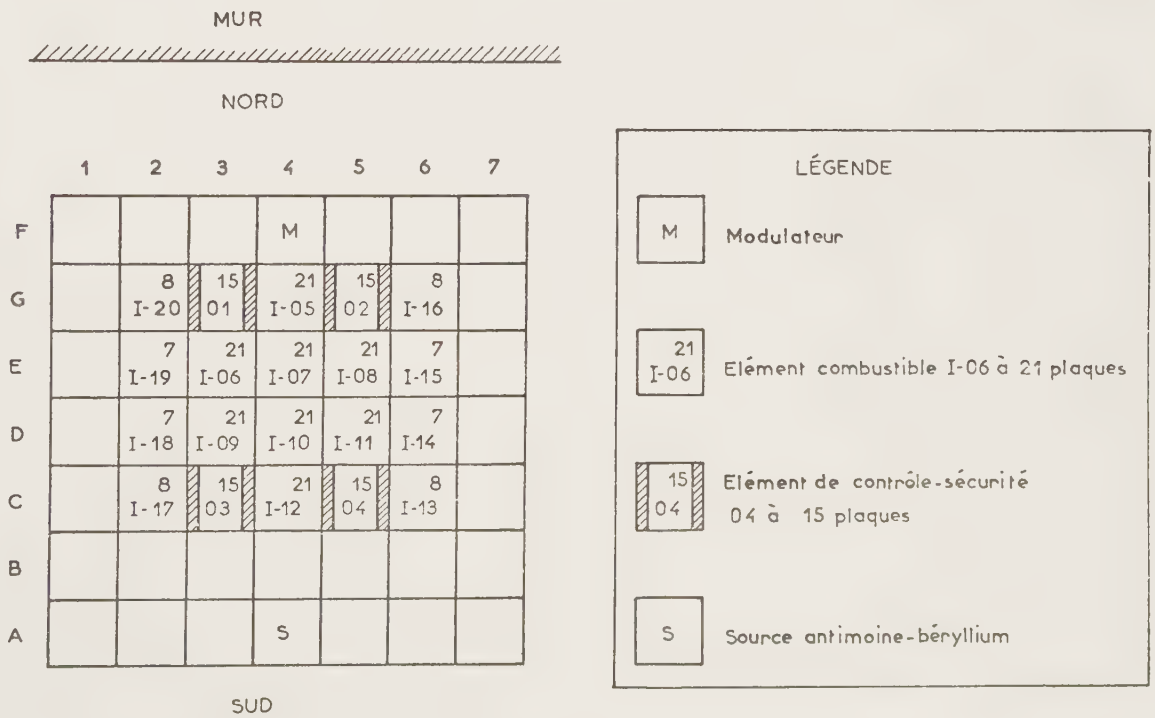


FIGURE 4 : CARTE DU COEUR DE CABRI POUR LES EXPÉRIENCES DE MODULATION

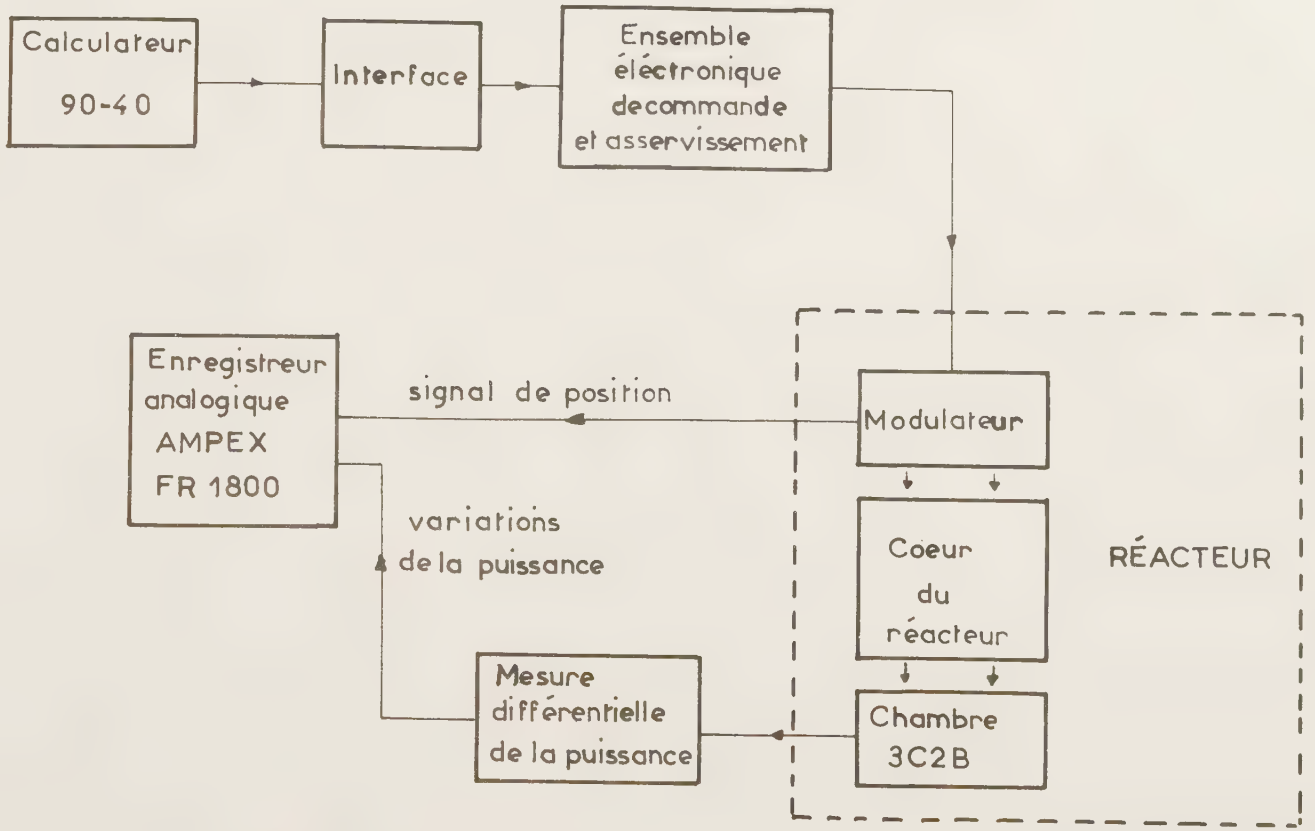


FIGURE 5 : DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

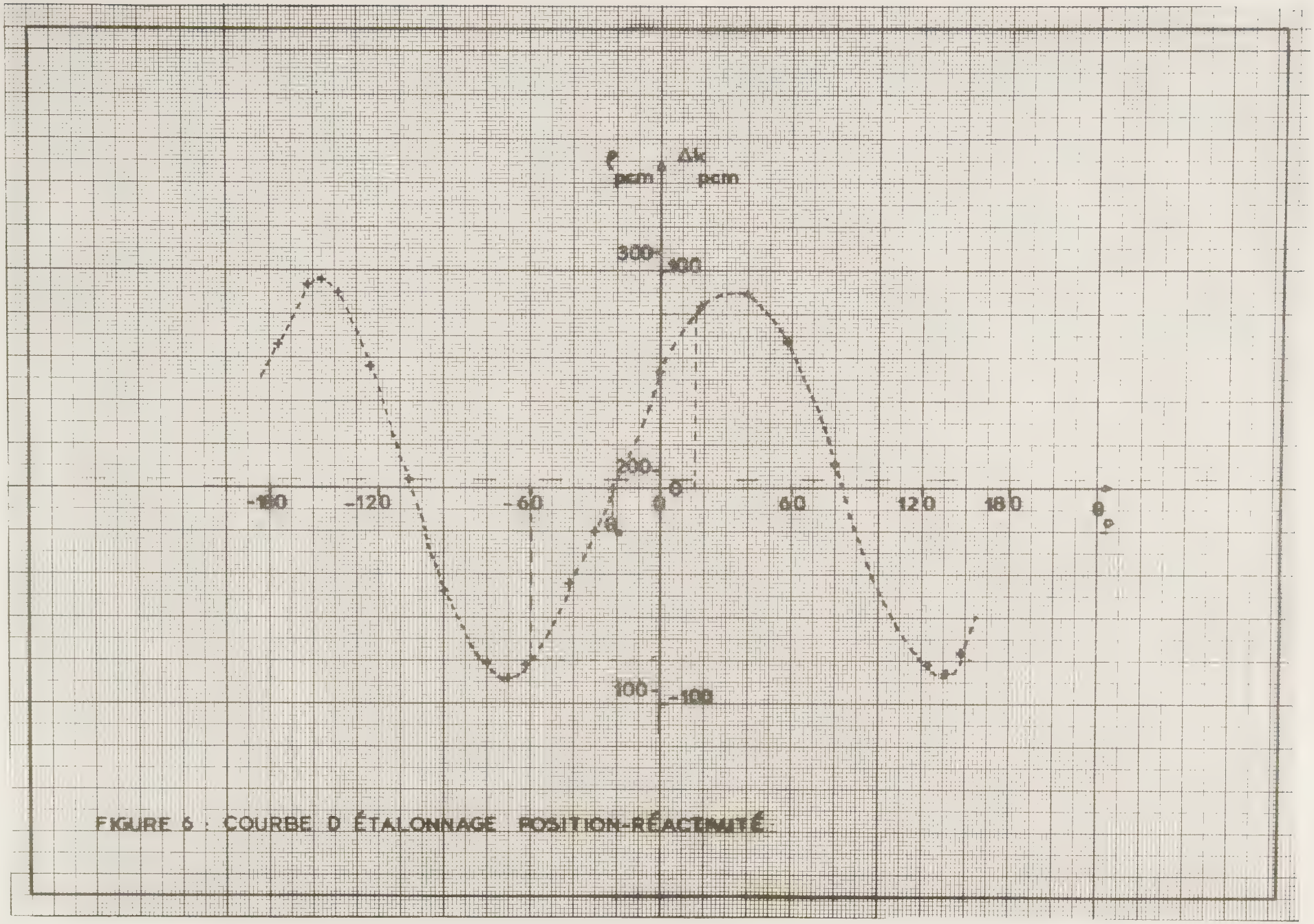
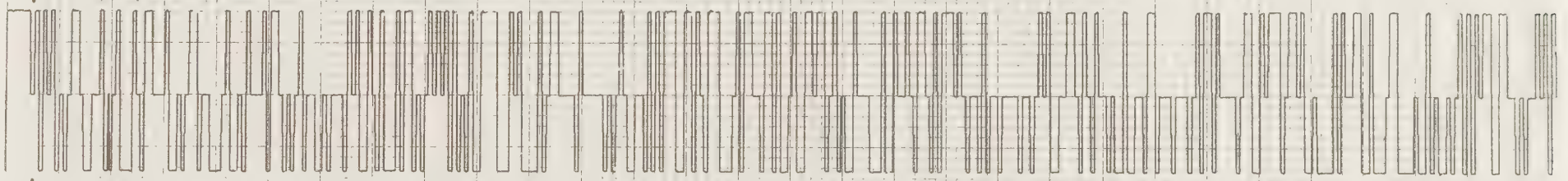


FIGURE 6 : COURBE D'ÉTALONNAGE POSITION-RÉACTIVITÉ



1 Volt

2 secondes

$m = 7$

$T = 2186\ \Delta t$

$C_1 = C_2 = \cdots C_7 = 1$

$a_4 = a_7 = -1$

$a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = a_6 = 1$

$\Delta t = 0{,}15$ s.

FIGURE 7 : SIGNAL PSEUDO-ALÉATOIRE TERNAIRE (ENREGISTREMENT)

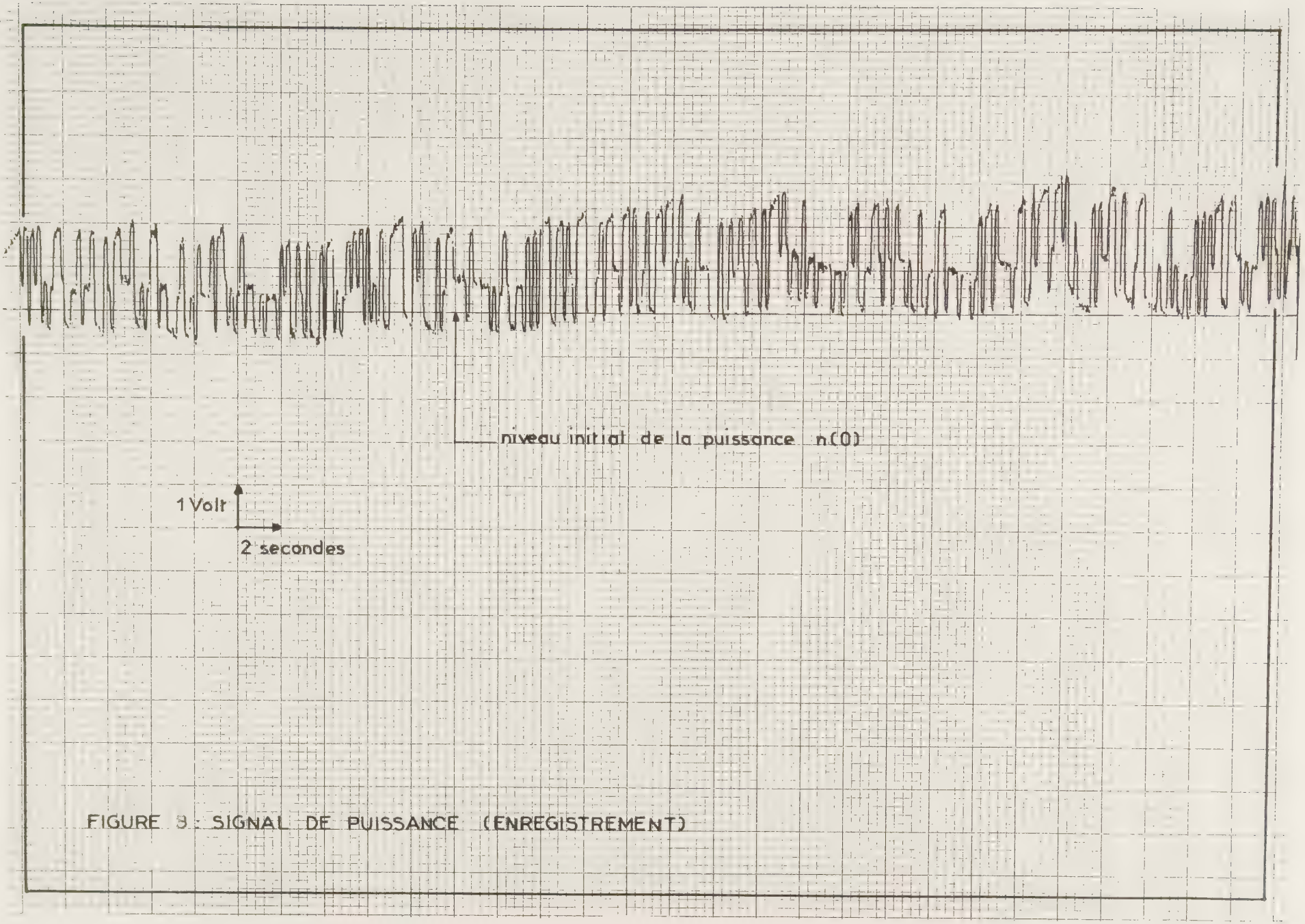


FIGURE 8 : SIGNAL DE PUISSANCE (ENREGISTREMENT)

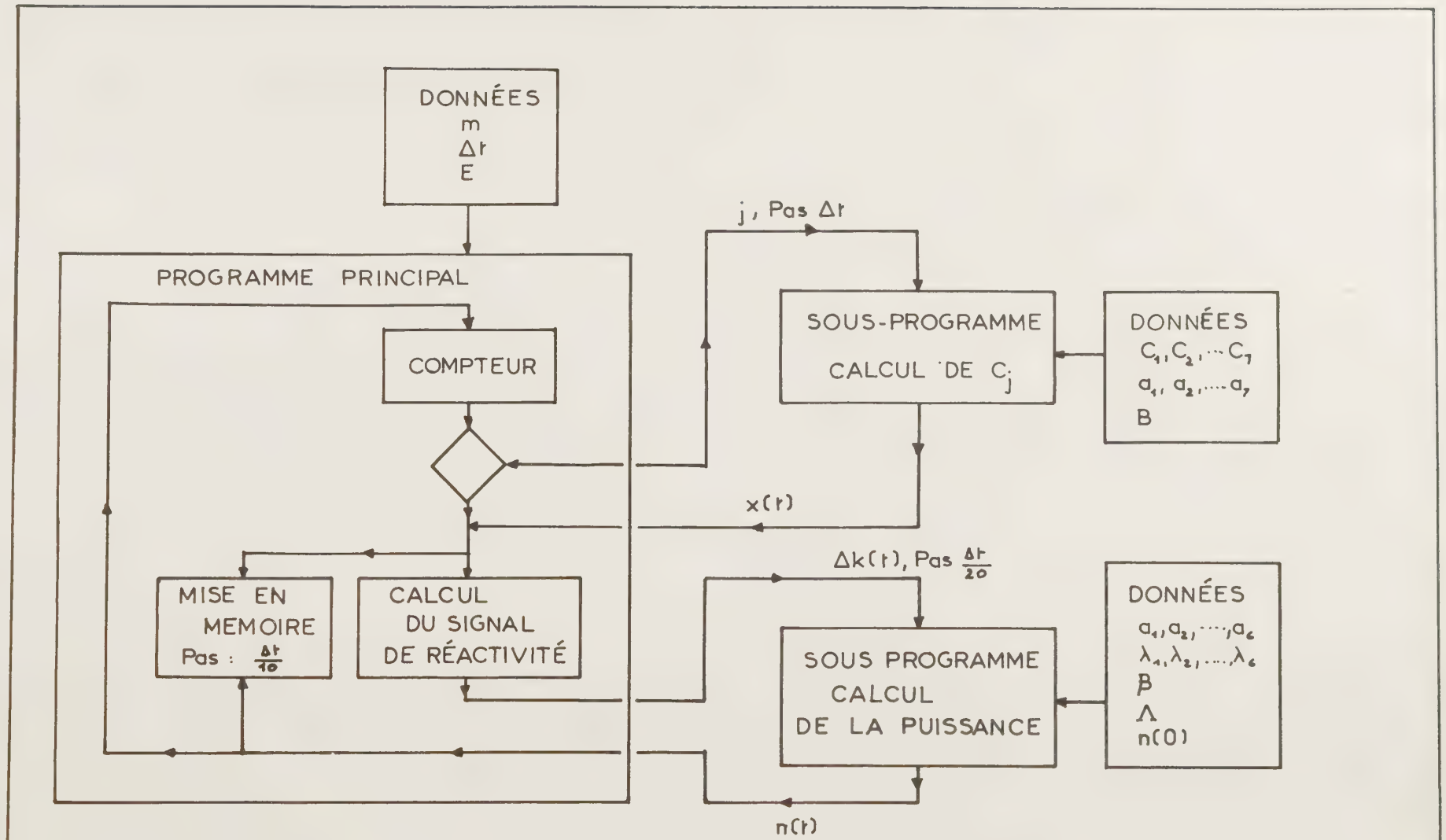


FIGURE 9 : ORGANIGRAMME DU PROGRAMME NUMÉRIQUE

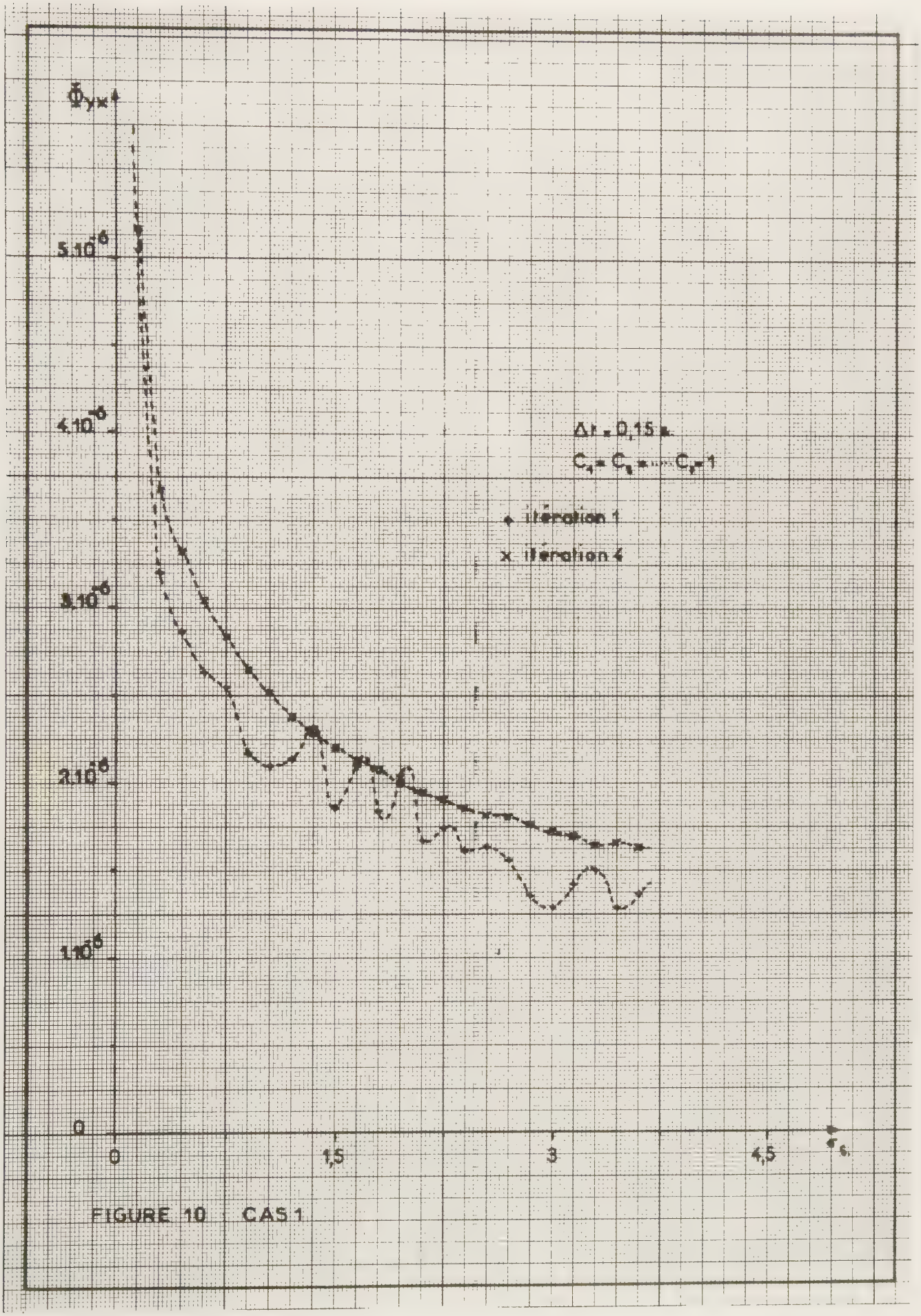


FIGURE 10 : CAS 1

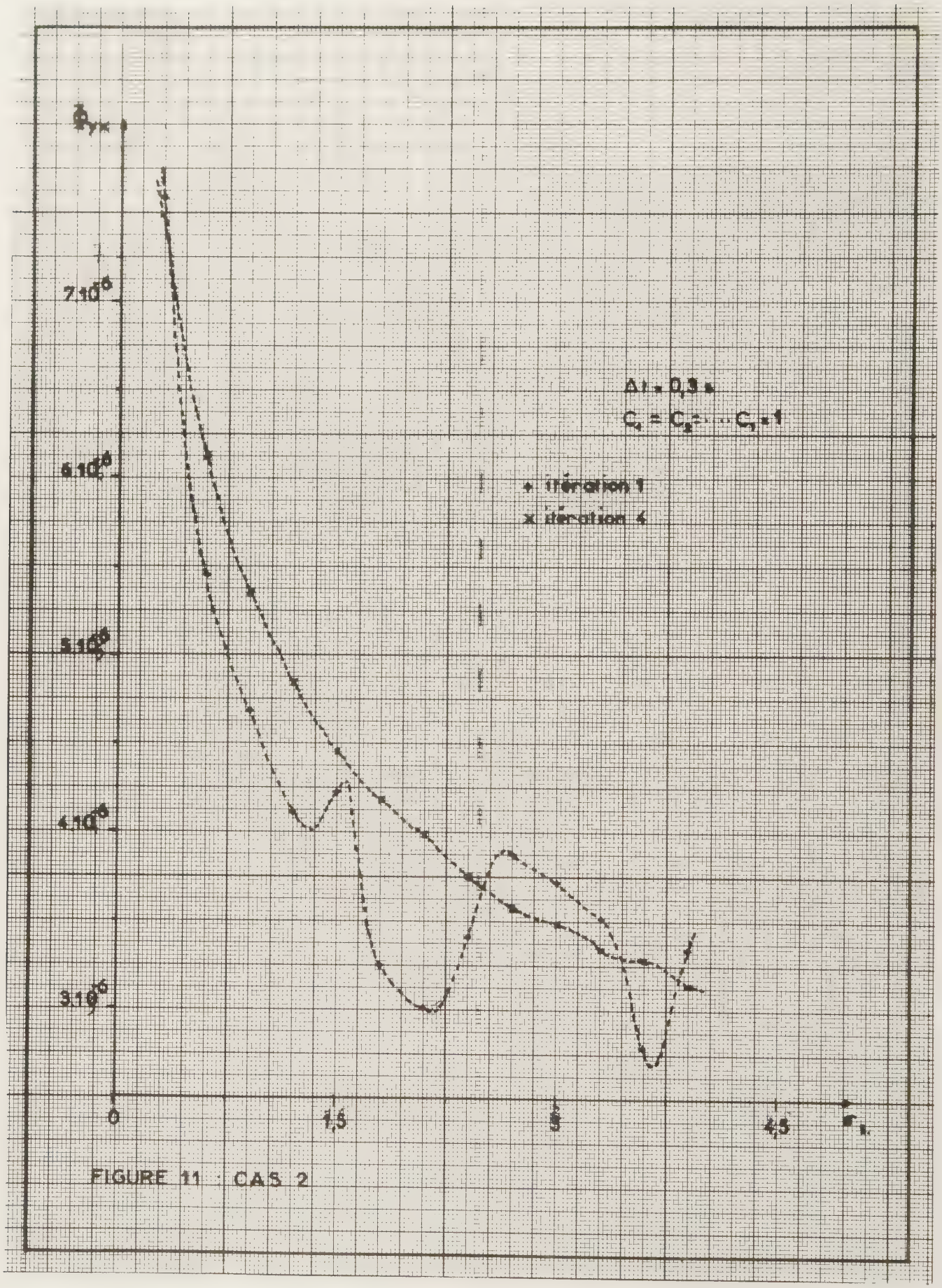


FIGURE 11 : CAS 2

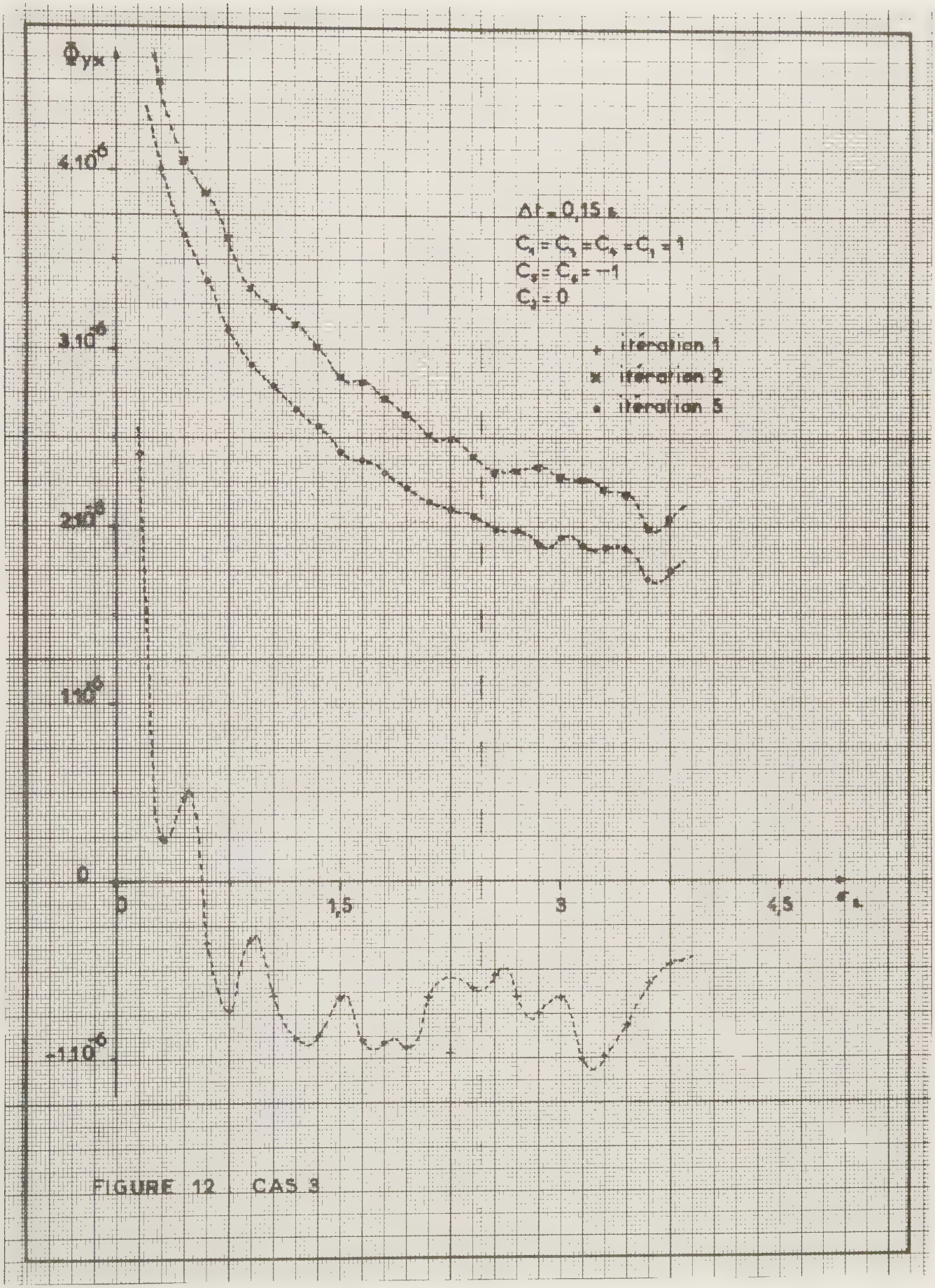


FIGURE 12 CAS 3

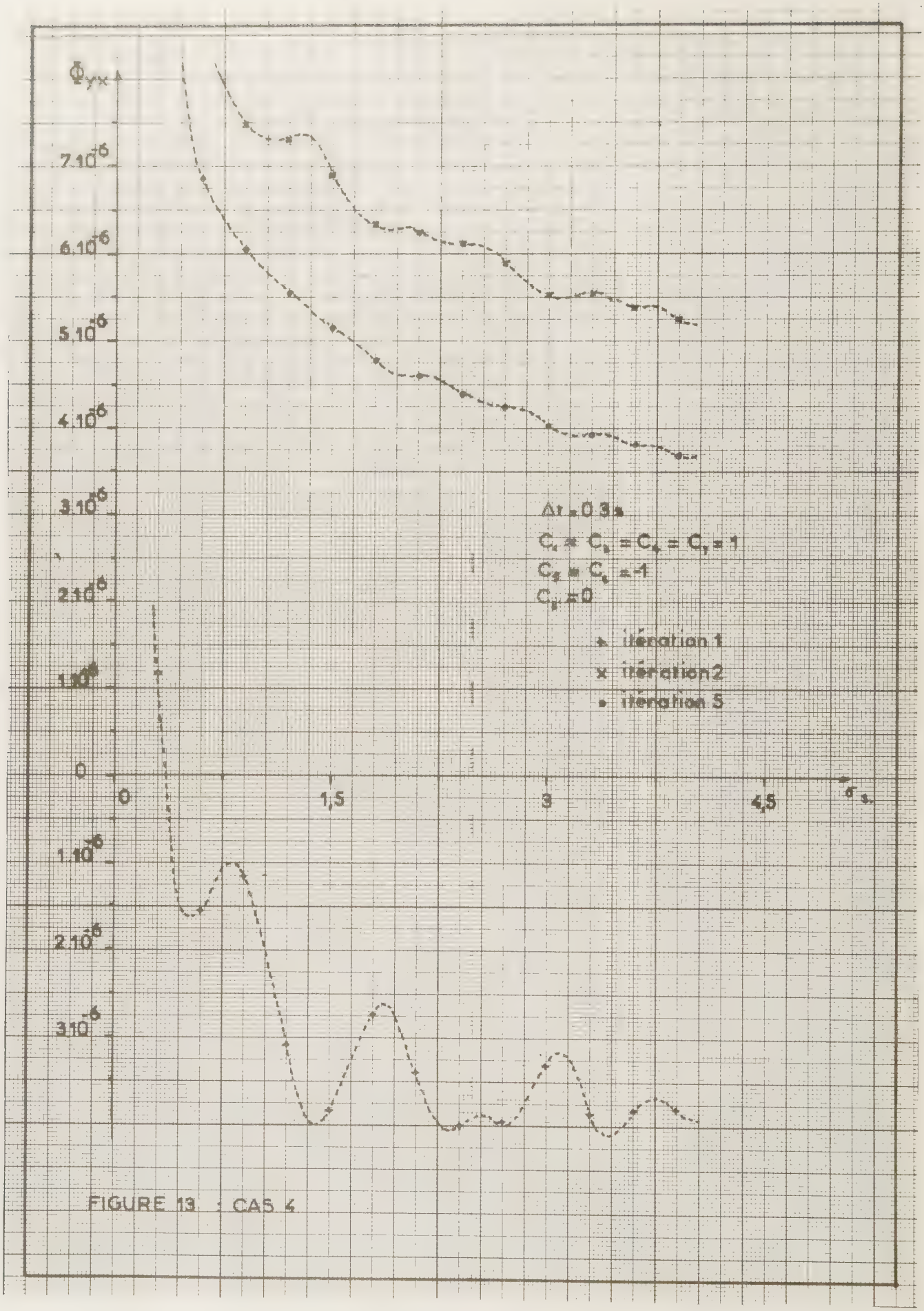


FIGURE 13 : CAS 4

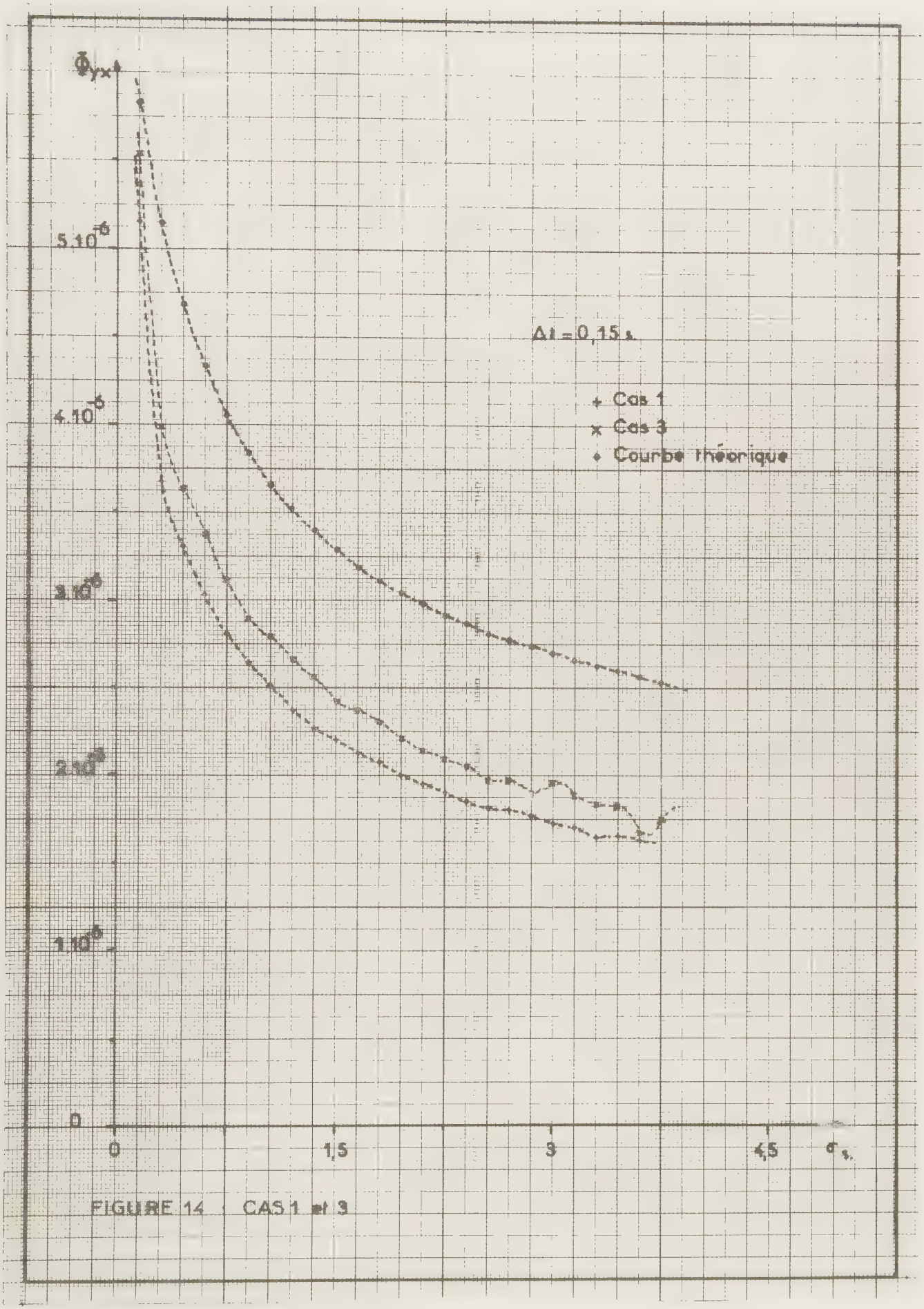


FIGURE 14 : CAS 1 et 3

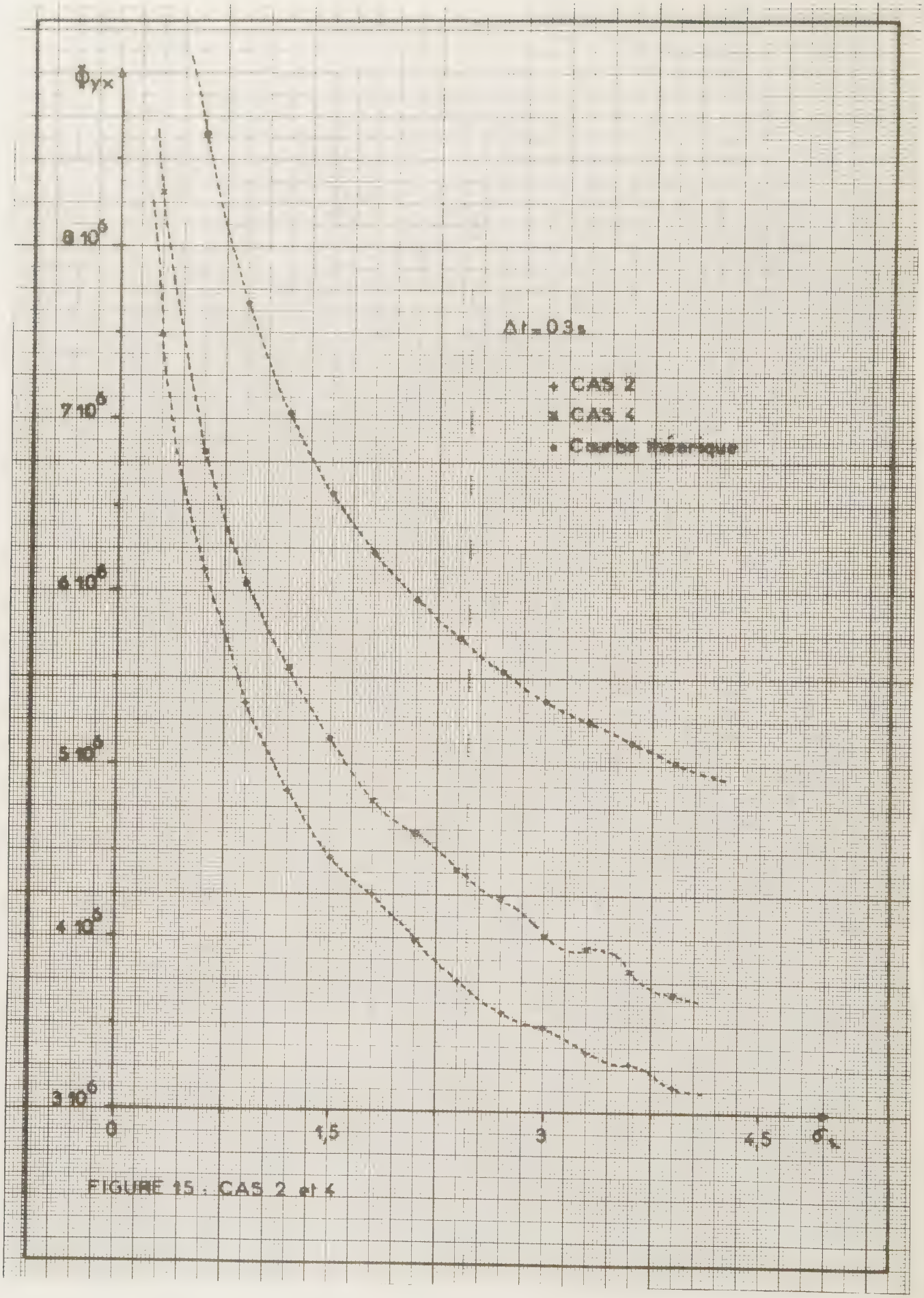


FIGURE 15 : CAS 2 et 4

UNIVERSITE DE PROVENCE
Place Victor-Hugo (3e)

Tél. 50 11 60

Marseille, le 20 septembre 1973

Référence à rappeler :

Le Secrétaire Général

à

Scolarité 3ème cycle

Monsieur ARCHAMBAULT

S/C de Monsieur le Professeur HENNEQUIN

J'ai l'honneur de vous faire savoir que, par décision en date du 17 septembre 1973 Monsieur le Président vient d'accorder le permis d'imprimer pour votre thèse de Docteur-Ingénieur portant sur le sujet suivant :

" Mesure des noyaux non linéaires d'un réacteur à basse puissance "

En conséquence, il conviendra de faire figurer les mentions ci-après à la fin du texte (et avant la bibliographie).

" Vu et permis d'imprimer

Marseille, le 17 septembre 1973

Le Président,

F. BOREL "

Pour le Secrétaire Général,
l'Attachée d'Administration Universitaire
Chef du service de la Scolarité,

M. DELTANG - BESOMBEUT

Imprimé
par le Bureau de Documentation
C.E.N./CADARACHE